

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

Habilitation à diriger des recherches
Spécialité : mathématiques

Document de synthèse présenté par
Jean-Baptiste Gouéré
le 5 décembre 2011

Rapporteurs :

Francis Comets	Université Denis Diderot - Paris 7
Serguei Popov	University of Campinas, Brésil
Zhan Shi	Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

Jury :

Romain Abraham	Université d'Orléans
Thierry Bodineau	École Normale Supérieure
Francis Comets	Université Denis Diderot - Paris 7
André Goldman	Université Claude Bernard - Lyon 1
Jean-François Le Gall	Université Paris 11
Didier Piau	Université Joseph Fourier - Grenoble 1
Zhan Shi	Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

Remerciements

Francis Comets, Serguei Popov et Zhan Shi m'ont fait l'honneur d'accepter d'écrire un rapport sur ce mémoire. Je leur en suis extrêmement reconnaissant.

Je remercie vivement Thierry Bodineau et Jean-François Le Gall d'avoir accepté de faire partie du jury. J'en suis très honoré.

Je suis également très heureux de la présence dans ce jury de Romain Abraham, André Goldman et Didier Piau. Le premier me soutient depuis mes débuts à Orléans ; le second m'a initié à la recherche ; le troisième m'a fait découvrir et aimer les probabilités.

Je tiens également à remercier chaleureusement mes trois co-auteurs : Jean Bérard, Régine Marchand et Didier Piau. Je suis très heureux des aventures mathématiques que nous avons vécues ensemble. Olivier Garet n'est pas l'un de mes coauteurs ; je l'inclus néanmoins dans ce paragraphe et tiens à le remercier pour les discussions que nous avons eues lors de mon arrivée à Orléans.

Je remercie vivement tous ceux qui contribuent à faire du Mapmo un laboratoire aussi agréable.

Enfin, je tiens à remercier tous mes proches.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Quasi-cristaux	11
2.1	Introduction et cadre	11
2.2	Résultats	13
3	Systèmes de particules en interaction	19
3.1	Déplacement du plus proche voisin	19
3.2	Modèles d'évolution de l'ADN avec dépendance du voisinage.	22
4	Percolation, percolation de premier passage et compétition	25
4.1	Percolation	25
4.1.1	Introduction	25
4.1.2	Modèle booléen : transitions de phase	27
4.1.3	Modèle booléen multi-échelle et modèles poissonniens plus généraux	33
4.1.4	Modèles non poissonniens	38
4.1.5	Modèle booléen : seuil de percolation, loi des rayons et dimension	40
4.2	Percolation de premier passage et compétition	47
4.2.1	Introduction.	47
4.2.2	Minoration de la constante de temps dans le modèle de Deijfen, modèle booléen de percolation de premier passage et chemins gourmands	50
4.2.3	Compétition	58
5	Marches aléatoires branchantes avec sélection	61
5.1	Introduction	61
5.2	Marches aléatoires branchantes.	61
5.3	Marches aléatoires branchantes avec compétition	63
5.4	Marches aléatoires branchantes avec barrière.	64
5.5	Liens avec l'équation FKPP	66
5.6	Idées des preuves	68
	Liste des travaux	71
	Bibliographie	73

Chapitre 1

Introduction

Structure du mémoire. Ce mémoire comprend quatre chapitres. La répartition est thématique mais également chronologique. Les deux premiers chapitres portent sur mes travaux les plus anciens. Les deux derniers chapitres concernent mes axes de recherches actuels. Je n'ai pas rédigé de partie spécifiquement dédiée à mes perspectives de recherche. Cependant, dans les deux derniers chapitres, j'ai explicité quelques questions et conjectures ou souligné l'incomplétude de certains résultats. Dans la suite de cette introduction je présente rapidement quelques objets et questions étudiés dans ce mémoire.

Chapitre 2. Quasi-cristaux. Les premiers quasi-cristaux ont été découverts en 1982 par Shechtman *et al.* [128]. Ce sont des solides dont le spectre de diffraction est essentiellement discret. Cette propriété du spectre révèle une structure microscopique fortement ordonnée. L'une des questions soulevées par la découverte de ces solides porte sur la nature précise de cet ordre microscopique.

Cette question a été formalisée mathématiquement par Hof en 1995 [76]. Dans cette formalisation, le solide est modélisé par l'ensemble des positions de ses atomes. Une mesure d'auto-corrélation et une mesure de diffraction sont associées à cet ensemble. La première mesure contient des informations statistiques sur les positions relatives des atomes du solide. La seconde mesure est la transformée de Fourier – au sens des distributions tempérées – de la première. Un quasi-cristal mathématique est un ensemble dont la mesure de diffraction associée est discrète. Cette formalisation a été adoptée dans la plupart des travaux mathématiques ultérieurs sur le sujet.

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous donnons deux caractérisations des quasi-cristaux. Nous donnons ainsi deux réponses à la contrepartie mathématique de la question évoquée ci-dessus. L'une des caractérisation est topologique : presque-périodicité au sens de Besicovitch. L'autre est dynamique : nature discrète du spectre du système dynamique associé. Les résultats de ce chapitre proviennent des articles [Gou03] et [Gou05]. Ces deux articles sont issus de ma thèse.

Chapitre 3. Systèmes de particules en interaction. Les résultats de ce chapitre proviennent des articles [Gou06] et [BGP08]. Le premier article est issu de ma thèse.

L'un de ces modèles a été introduit par les biologistes Duret et Galtier en 2000 [54]. Il modélise l'évolution d'une chaîne d'ADN sous l'effet de réplifications successives imparfaites. Ce modèle a été étudié via des simulations numériques ou des méthodes non rigoureuses. Nous montrons que différentes quantités biologiquement pertinentes peuvent en réalité être explicitées de manière rigoureuse.

Chapitre 4. Percolation, percolation de premier passage et compétition. Ce chapitre correspond aux articles [Gou07, Gou08, Gou09, Gou10, GM08, GM11].

Nous introduisons les différents thèmes de ce chapitre en nous concentrant sur le modèle booléen. Ce modèle n'est pas le seul étudié dans ce chapitre. Il est toutefois relativement central. Le modèle booléen est pour nous une réunion de boules de \mathbb{R}^d dont les centres et les rayons sont aléatoires. Plus précisément :

- Les centres sont donnés par un processus de Poisson homogène de densité λ .
- Les rayons sont des copies indépendantes d'une variable aléatoire R . Ils sont également indépendants du processus des centres.

Ce modèle semble avoir été introduit par Gilbert en 1961 [68] pour modéliser la transmission d'ondes radioélectriques.

Fixons R et faisons varier λ . Le seuil de percolation $\lambda^c(R) \in [0, +\infty]$ sépare la phase sous-critique et la phase sur-critique :

- Pour $\lambda < \lambda^c(R)$, les composantes connexes du modèle booléen sont bornées avec probabilité 1.
- Pour $\lambda > \lambda^c(R)$, l'une des composantes connexes du modèle booléen est non bornée avec probabilité 1.

Il y a une transition de phase pour la percolation si le seuil $\lambda^c(R)$ appartient à $(0, +\infty)$. Il existe une telle transition de phase si et seulement si le volume moyen des boules est fini. C'est l'un des résultats principaux de ce chapitre. Le fait que la condition sur le volume soit nécessaire avait été établi préalablement par Hall en 1985 [71]. Signalons également que, contrairement à ce qu'il se passe pour la percolation classique sur \mathbb{Z}^d , la queue de la loi de la taille des composantes connexes ne décroît pas toujours exponentiellement vite dans la phase sous-critique.

Fixons maintenant $\lambda = \lambda^c(R)$. Nous considérons donc le modèle booléen critique. Une certaine proportion de l'espace est alors recouverte. Une partie de nos recherches a été motivée par les questions suivantes : pour quelles variables aléatoires R cette proportion est-elle minimale ? Plus précisément, cette proportion est-elle minimale lorsque R est constant comme différents résultats le laissent penser ? De manière plus imagée, des boules de rayons différents ont-elles du mal à collaborer pour créer de grandes composantes connexes ? Nous ne sommes pas parvenu à répondre totalement à ces questions. Nous avons toutefois montré que, en grande dimension, la proportion recouverte dans le modèle booléen critique n'est pas minimisée lorsque les boules ont toutes le même rayon.

Associions maintenant au modèle booléen un modèle de percolation de premier passage. Imaginons que le territoire initial d'une colonie est $S_0 = \{0\}$. La colonie étend son territoire à vitesse 1 hors du modèle booléen et à vitesse infinie dans le modèle booléen. Notons S_t le territoire à l'instant t . Le comportement asymptotique de S_t/t lorsque t tend vers l'infini est un sujet d'étude classique en percolation de premier passage. Lorsque la vitesse de propagation est finie, S_t/t converge vers une boule euclidienne déterministe. Nous donnons dans le chapitre 3 des majorations de cette vitesse. Ce problème est lié à la percolation : si le modèle booléen percole, la vitesse est infinie ; la réciproque est moins claire. Nous avons introduit ce modèle lors de notre étude du modèle de Deijfen [46]. Ces problèmes sont également reliés aux chemins gourmands introduits par Cox, Gandolfi, Griffin et Kesten dans [43].

La compétition apparaît lorsqu'il y a plusieurs colonies. Leurs territoires initiaux sont par exemple des singletons distincts. L'évolution des territoires se fait comme précédemment, à l'exception du fait qu'une fois qu'un point est conquis par une colonie, il reste éternellement la possession de cette colonie. Il y a coexistence si chaque colonie parvient à conquérir un territoire non borné. L'une des questions est de déterminer si la coexistence est possible avec une probabilité non nulle. Ce type de modèle a été introduit par Häggström et Pemantle en 1998 [70]. Les questions de coexistence sont reliées à des questions sur les géodésiques en percolation

de premier passage.

Chapitre 5. Marches aléatoires branchantes avec sélection. Ce chapitre expose les résultats des articles [BG10] et [BG11].

L'un des modèles étudiés décrit l'évolution de N particules sur la droite réelle. L'évolution est markovienne et discrète en temps. Le pas élémentaire de la dynamique est le suivant :

- Chacune des N particules se divise en deux particules.
- Chacune des $2N$ particules ainsi produites effectue un pas aléatoire.
- Seules les N particules les plus à droites sont conservées.

Les pas sont indépendants et de même loi. Ce modèle appartient à une classe de modèles étudiés par Brunet et Derrida depuis 1997 [34] puis notamment par Mueller, Meunier et Simon. De ces travaux sont issues des conjectures portant sur la généalogie ou sur la vitesse v_N du nuage de particules. Ces modèles sont par ailleurs fortement reliés à des équations de type F-KPP modifiées.

Dans le chapitre 4 nous présentons des résultats sur la vitesse v_N . Les preuves font appel à un autre modèle de marches aléatoires branchantes avec sélection. Dans ce dernier modèle, l'étape de sélection est modifiée ainsi : seule les particules à droite d'une barrière se déplaçant à vitesse linéaire sont conservées. Nous présentons également des résultats sur ce modèle.

Chapitre 2

Quasi-cristaux

2.1 Introduction et cadre

Ce chapitre présente les articles [Gou03] et [Gou05]. Ces articles constituent les deux premiers chapitres de ma thèse.

Cristaux et quasi-cristaux. Les cristaux sont des solides vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Périodicité : ce sont des empilements périodiques d'une unique maille élémentaire microscopique.
2. Ordre : leur spectre de diffraction est essentiellement discret, ce qui est le signe d'une structure microscopique ordonnée.

La seconde propriété est une conséquence de la première. Nous pourrions donc tout aussi bien définir les cristaux comme étant des solides périodiques. Jusqu'en 1982, tous les solides connus vérifiant l'une de ces deux propriétés vérifiaient également l'autre. D'un point de vue pratique, ces deux propriétés – périodicité et ordre – étaient donc considérées comme équivalentes. En 1982, Shechtman *et al.* [128] ont découvert un solide dont le spectre de diffraction était essentiellement discret mais dont les symétries interdisaient la périodicité. Ce solide vérifiait donc la seconde des propriétés ci-dessus sans vérifier la première. De nombreux autres solides de ce type ont été découverts depuis.

Cela a amené les cristallographes à introduire la définition suivante : un quasi-cristal est un solide dont le spectre de diffraction est essentiellement discret [118]. Nous renvoyons à [98] pour une discussion autour de cette définition. Les cristallographes définissent ainsi les quasi-cristaux comme des solides dont la structure microscopique est ordonnée, mais ils restent vagues sur la nature précise de cet ordre. Un cristal reste défini comme ci-dessus. Un cristal est donc un quasi-cristal particulier¹.

La découverte des quasi-cristaux a suscité de nombreuses études en physique comme en mathématiques. Voici une liste non exhaustive d'axes de recherches :

- lien entre le spectre de diffraction et la structure microscopique d'un solide,
- nature précise de l'ordre microscopique des quasi-cristaux,
- pavages et mécanisme de formation des quasi-cristaux,

1. Les cristallographes adoptent en réalité les définitions suivantes :
– un cristal est un solide dont le spectre de diffraction est essentiellement discret.
– un quasi-cristal est un cristal non périodique.

Nous avons préféré adopter des définitions inclusives, comme c'est l'usage en général en mathématique et comme c'est l'usage en particulier dans les articles de physique mathématique dédiés au sujet.

– propriétés de conceptions électriques ou thermiques de ces solides.

Nos travaux [Gou03] et [Gou05] sont dédiés aux aspects mathématiques des deux premières questions ci-dessus.

Formalisme de Hof. Une formalisation mathématique de la diffraction a été précisée par Hof [76] en 1995. Cette formalisation a été adoptée dans la plupart des travaux mathématiques ultérieurs sur le sujet. Elle fournit en particulier le cadre mathématique de nos travaux [Gou03] et [Gou05]. L’objet de ce paragraphe est de décrire cette formalisation. Nous renvoyons à l’ouvrage de Cowley [41] pour une approche physique de ce sujet.

Suivant Hof, nous modélisons le solide par un sous-ensemble localement fini $S \subset \mathbb{R}^d$. Cet ensemble représente l’ensemble des positions des atomes. Typiquement, c’est un ensemble infini. Il est physiquement naturel de supposer que cet ensemble est uniformément discret, c’est-à-dire que la distance entre deux de ses points est minorée par une constante strictement positive. Nous ferons parfois cette hypothèse.

Pour tout $R > 0$, nous définissons une mesure d’auto-corrélation γ_R par :

$$\gamma_R = \left(\sum_{x \in S \cap B(0,R)} \delta_x \right) * \left(\sum_{x \in S \cap B(0,R)} \delta_{-x} \right)$$

où $B(0, R)$ désigne la boule centrée en l’origine et de rayon R . La mesure d’auto-corrélation de S est, lorsqu’elle existe, la limite au sens de la topologie faible suivante :

$$\gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \gamma_R$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue. Nous nous plaçons dans le cas où cette limite existe. Cette mesure d’auto-corrélation contient une information de nature statistique sur la position relative des atomes du solide étudié.

Cette mesure d’auto-corrélation n’est – en général – pas finie. Elle est cependant tempérée et définie positive. Cela nous permet de définir la mesure de diffraction de S comme étant $\hat{\gamma}$, la transformée de Fourier au sens des distributions tempérées de la mesure d’auto-corrélation. De manière extrêmement vague, si A est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , $\hat{\gamma}(A)$ représente l’intensité lumineuse diffractée dans une direction codée par A .

Hof définit alors un quasi-cristal² comme étant un ensemble localement fini de \mathbb{R}^d admettant une mesure d’auto-corrélation dont la transformée de Fourier est une mesure discrète.

L’une des questions porte alors sur la nature de ces quasi-cristaux (au sens de Hof). Nous avons donné dans [Gou05] deux réponses à cette question en donnant une caractérisation topologique et une caractérisation dynamique.

Exemples. Nous donnons dans ce paragraphe quelques exemples de quasi-cristaux au sens de Hof.

L’exemple le plus simple est le réseau \mathbb{Z}^d . Mathématiquement, c’est une conséquence immédiate de la formule sommatoire de Poisson :

$$\hat{\gamma} = \gamma = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \delta_x.$$

Physiquement, cela revient essentiellement à dire que les solides dont la structure microscopique est périodique possèdent un spectre de diffraction essentiellement discret. Autrement dit, les cristaux sont des quasi-cristaux.

2. Dans [Gou05], nous avons suivi Lagarias [92] en appelant ces ensembles des ensembles de Patterson. Dans ce mémoire, nous préférons appeler simplement ces ensembles des quasi-cristaux.

Un exemple plus original est fourni par l'ensemble V_d des points de \mathbb{Z}^d visibles depuis l'origine :

$$V_d = \{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \text{les entiers } k_i \text{ sont premiers entre eux dans leur ensemble}\}.$$

Ce résultat a été établi dans [13] puis, d'une manière plus simple, dans [12].

Pour conclure ce paragraphe, nous décrivons rapidement une famille très importante d'exemples. Les ensembles de cette famille sont appelés en anglais des *model sets* ou des *cut and project sets*. Nous les appellerons des ensembles modèles. Ils ont été introduits et étudiés pour la première fois par Meyer dans [111] pour leurs propriétés harmoniques. Nous décrivons cette famille dans un cadre concret et restreint. Plaçons-nous dans \mathbb{R}^n et donnons-nous deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux E et F . Fixons également un sous-ensemble borné W de F . Notons π_E la projection orthogonale sur E . Notons π_F celle sur F . L'ensemble modèle associé aux espaces E et F et à l'ensemble W est le sous-ensemble Λ de E défini par :

$$\Lambda = \pi_E((E + W) \cap \mathbb{Z}^n).$$

Autrement dit, Λ est l'ensemble des projections orthogonales sur E des points du réseau \mathbb{Z}^n dont la projection orthogonale sur F appartient à W . Sous des conditions assez générales, un ensemble modèle est un quasi-cristal. Ce résultat a été établi à différents degrés de généralité dans [76, 112, 127, 133].

2.2 Résultats

Cadre stochastique. Dans [Gou03], nous étudions la diffraction dans un cadre stochastique. Nous considérons que l'ensemble des positions des atomes est modélisé par une réalisation d'un processus ponctuel χ sur \mathbb{R}^d . Autrement dit, nous considérons que notre solide est aléatoire. Nous supposons le processus ponctuel stationnaire et ergodique sous l'action des translations de \mathbb{R}^d . Ce cadre est mathématiquement naturel du fait de nature statistique de la mesure d'auto-corrélation. Il permet par ailleurs et par exemple de considérer des modèles obtenus en perturbant aléatoirement une configuration idéale. Néanmoins, les seuls modèles stochastiques étudiés avant notre étude étaient soit rudimentaires soit spécifiques : suppression i.i.d. des points d'un ensemble déterministe [9, 11], perturbation i.i.d. de la position des points d'un ensemble déterministe [75] ou processus associé à un pavage aléatoire [9, 37, 60, 86].

Pour énoncer notre premier résultat, nous avons besoin de quelques définitions. Nous renvoyons à Baccelli et Brémaud [14], Möller [114] et Neveu [117] pour une présentation plus complète. Un processus ponctuel χ est intégrable si, pour tout compact A , le cardinal de $\chi \cap A$ est intégrable. On définit similairement la notion de processus ponctuel de carré intégrable. La mesure de Palm d'un processus ponctuel stationnaire intégrable χ est une mesure \tilde{P} sur l'ensemble des configurations des processus ponctuels définie par :

$$\tilde{P}(F) = \frac{1}{|B|} E \left[\sum_{x \in \chi \cap B} 1_F(\chi - x) \right] \quad (2.1)$$

où B est un borélien fixé de \mathbb{R}^d de mesure $|B|$ finie et non nulle. Cette définition est indépendante du choix de B . La mesure \tilde{P} renormalisée s'interprète comme la loi de χ conditionnée par la présence d'un point en l'origine. Enfin, l'intensité de \tilde{P} est la mesure I sur \mathbb{R}^d définie par :

$$I(A) = \int \text{card}(\phi \cap A) d\tilde{P}(\phi).$$

C'est une mesure localement finie lorsque χ est de carré intégrable. Cette mesure est essentiellement le spectre de Bartlett étudié en géométrie stochastique (voir par exemple [44]). Nous démontrons dans [Gou03] le résultat suivant.

Théorème 1 (G.) *Soit χ un processus ponctuel stationnaire et ergodique de \mathbb{R}^d . Si χ est de carré intégrable, alors χ admet presque sûrement pour mesure d'auto-corrélation l'intensité de sa mesure de Palm.*

L'hypothèse d'intégrabilité faite sur χ est une condition nécessaire pour l'existence des objets étudiés.

Considérons par exemple le cas où χ est un processus de Poisson ponctuel stationnaire sur \mathbb{R}^d . Supposons, pour fixer les idées, que sa mesure d'intensité est la mesure de Lebesgue. Alors la mesure de Palm de χ coïncide avec la loi du processus $\chi_0 := \chi \cup \{0\}$ (voir Möller [114]). Via le théorème 1, on en déduit alors immédiatement que χ admet presque sûrement une mesure d'auto-corrélation γ vérifiant $\gamma = \hat{\gamma} = \delta_0 + |\cdot|$ où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue. D'une certaine manière, le processus de Poisson ponctuel est à l'opposé des quasi-cristaux.

Le théorème 1 nous a permis d'étudier dans [Gou03] les mesures de diffraction de diverses familles de processus ponctuels. Nous avons par exemple repris la construction des ensembles modèles décrits dans l'introduction (voir le paragraphe donnant des exemples de quasi-cristaux) en remplaçant le réseau \mathbb{Z}^d par un processus ponctuel. La mesure de diffraction du processus ponctuel obtenu peut alors s'exprimer en fonction de la mesure de diffraction du processus ponctuel initial. Nous avons ainsi retrouvé et généralisé de manière assez naturelle des résultats de Baake et Moody [11]. La mesure de Palm, qui est un intermédiaire entre le processus ponctuel et sa mesure de diffraction, apparaît comme un intermédiaire agréable dans cette étude. Nous avons également construit, à partir de processus gaussiens, des exemples d'ensembles dont la mesure de diffraction comporte une partie singulière explicite.

Caractérisation déterministe des quasi-cristaux. Nous nous plaçons toujours dans le cadre mathématique décrit par Hof en 1995 dans [76] et rappelé dans la section 2.1. Notons \mathcal{U} l'ensemble des sous-ensembles uniformément discrets de \mathbb{R}^d . Rappelons qu'un sous-ensemble de \mathbb{R}^d est uniformément discret si la distance entre deux de ses points est minorée par une constante strictement positive. Notons \mathcal{A} l'ensemble des éléments de \mathcal{U} qui admettent une mesure d'auto-corrélation. Nous cherchons à donner une caractérisation topologique des éléments de \mathcal{A} qui sont des quasi-cristaux.

Commençons par regrouper quelques notations et définitions utiles pour la suite. La densité supérieure d'un ensemble $S \in \mathcal{U}$ est :

$$\overline{\text{dens}}(S) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \text{card}(S \cap B(0, R)).$$

Sa densité inférieure $\underline{\text{dens}}(S)$ est définie similairement. Un élément $S \in \mathcal{U}$ est relativement dense s'il existe un rayon $R > 0$ telle que toute boule de rayon R intersecte S . Enfin, si d est une semi-distance invariante par translation sur \mathcal{U} , un élément $S \in \mathcal{U}$ est presque-périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des presque-périodes $\{t \in \mathbb{R}^d : d(S, S - t) \leq \varepsilon\}$ est relativement dense. Sur le sujet de la presque-périodicité nous renvoyons au livre de Katznelson [85].

Les quasi-cristaux sont depuis longtemps conjecturés être presque-périodiques en un certain sens. Avant nos travaux, l'un des résultats mathématiques les plus aboutis sur le sujet était dû à Baake et Moody [12]. Considérons $S \in \mathcal{A}$ et notons γ sa mesure d'auto-corrélation. Dans [12], les auteurs supposent que le support de γ est uniformément discret. Ils prouvent³ alors que S

3. Leur contexte est plus général : S est un ensemble pondéré – ces pondérations interviennent dans la définition de la mesure d'auto-corrélation – et ils travaillent dans un groupe abélien localement compact et σ -compact.

est un quasi-cristal si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $P_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}^n : \gamma(t) \geq \gamma(0) - \varepsilon\}$ est relativement dense. Dans le cas particulier où la différence $S - S$ est uniformément discrète – condition qui entraîne le caractère uniformément discret du support de γ – leur caractérisation signifie que S est presque-périodique dans l'espace \mathcal{U} muni de la semi-métrique δ définie par

$$\delta(S, S') = \overline{\text{dens}}(S\Delta S'). \quad (2.2)$$

La caractérisation obtenue par Baake et Moody est une généralisation ou une amélioration de résultats de Queffelec (voir le lemme 6.25 de [124]) et Solomyak [133]. Voir également Lagarias [92] et Lagarias et Pleasants [93].

La caractérisation n'est plus vraie si le support de γ n'est plus supposé uniformément discret, comme le montre l'exemple des ensembles modèles déformés (voir [22]).

Dans [Gou05] avons introduit la semi-distance de Besicovitch \bar{d} sur \mathcal{U} définie par :

$$\bar{d}(S, S') = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} d(S - t, S' - t) dt,$$

où d est une distance locale classique sur \mathcal{U} . Essentiellement, deux ensembles sont proches pour cette dernière distance locale d si leurs restrictions à une grande boule centrée en l'origine sont proches pour la distance de Hausdorff. Le nom de Besicovitch fait référence à la semi-distance \bar{d}_B définie par Besicovitch (voir par exemple [23]) sur l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$\bar{d}_B(f, g) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} |f - g| = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(0, R)|} \int_{B(0, R)} d_B(f_t, g_t) dt$$

où f_t et g_t sont les fonctions f et g translatées de t et où d_B est la valeur absolue de la différence entre les valeurs des deux fonctions en l'origine. Les deux semi-distances sont construites de la même manière : ce sont des moyennes asymptotiques de l'évaluation d'une (semi-)distance locale selon des translatés.

Dans [Gou05], nous avons prouvé que, dans le cas général, un ensemble $S \in \mathcal{A}$ est un quasi-cristal si et seulement si S est presque-périodique dans l'espace \mathcal{U} muni de la semi-distance de Besicovitch \bar{d} . Ainsi, la caractérisation donnée dans [12] reste vraie en général si on remplace la δ -presque-périodicité par la \bar{d} -presque-périodicité. Notons que l'étude des liens entre diffraction et presque-périodicité du type étudié par Besicovitch était suggérée par Lagarias [92].

Plus précisément, nous établissons le résultat suivant.

Théorème 2 (G.) *Soit $S \in \mathcal{A}$. Soit γ la mesure d'auto-corrélation de S . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. S est un quasi-cristal.
2. S est presque-périodique dans (\mathcal{U}, \bar{d}) .
3. Pour tout $R > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}^n : \gamma(t + B(0, R)) \geq \gamma(\{0\}) - \varepsilon\}$ est relativement dense.
4. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}^n : \underline{\text{dens}}(S \setminus (S - t + B(0, \varepsilon))) \leq \varepsilon\}$ est relativement dense.

La preuve de ce résultat est, contrairement à celles de la plupart des résultats précédents, relativement robuste. En particulier, le caractère uniformément discret n'est pas véritablement nécessaire ici pour le résultat principal, c'est-à-dire l'équivalence entre les deux premières propriétés. Sans cette hypothèse, la preuve et la semi-métrique adéquate s'adaptent et il est par exemple possible de remplacer S , que l'on peut voir comme $\sum_{x \in S} \delta_x$, par une mesure plus générale.

Caractérisation dynamique des quasi-cristaux. Nous nous plaçons une nouvelle fois dans le cadre mathématique décrit par Hof en 1995 dans [76] et rappelé dans la section 2.1. Nous nous plaçons également dans le cadre stochastique décrit au début de cette section.

Soit χ un processus ponctuel stationnaire, ergodique et uniformément discret de \mathbb{R}^d . Notons P sa loi. Par le théorème 1 nous savons que χ admet presque sûrement une mesure d'auto-corrélation et que cette mesure est l'intensité de la mesure de Palm de χ . C'est un quasi-cristal avec probabilité 0 ou 1. Nous cherchons à déterminer sous quelles conditions χ est presque sûrement un quasi-cristal.

Dans [133], Solomyak montre que si, pour tout ε , l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R}^d : P\{\chi : d(\chi - x, \chi) > \varepsilon\} < \varepsilon\}$$

est relativement dense, alors le système dynamique associé a un spectre discret. Par un résultat de Dworkin [55], cela implique que χ est presque sûrement un quasi-cristal. La condition de Solomyak est une condition de presque-périodicité. La presque-périodicité est donc une condition suffisante pour que χ soit presque sûrement un quasi-cristal. Dans le cas des systèmes dynamiques associés à des pavages auto-similaires, une réciproque est connue. Voir Lee, Moody et Solomyak [96] et Solomyak [132].

Dans [95], Lee, Moody et Solomyak construisent un processus ponctuel de la manière suivante. Soit S un ensemble uniformément discret. Ils supposent que $S - S$ est localement fini. C'est une hypothèse relativement forte. Ils considèrent Ω , la fermeture dans (\mathcal{U}, d) de l'orbite de S sous l'action des translations. Dans cette topologie, Ω est compact. Ils fixent alors une mesure de probabilité stationnaire et ergodique P sur Ω . C'est la loi d'un processus ponctuel stationnaire, ergodique et uniformément discret χ . Ils prouvent que χ est presque sûrement un quasi-cristal si et seulement si le système dynamique $(\Omega, (T_t)_t, P)$ a un spectre discret. Leur contexte est plus général : les points sont pondérés ; les poids sont choisis parmi un ensemble fini et interviennent dans la définition de la mesure d'auto-corrélation. C'est une généralisation d'un résultat de Queffélec ([124] proposition 4.21) concernant les sous-ensembles pondérés de \mathbb{Z} .

Dans [Gou05] nous considérons χ , un processus ponctuel stationnaire, ergodique et uniformément discret – ou simplement de carré intégrable – et prouvons que χ est presque sûrement un quasi-cristal si et seulement si le système dynamique associé a un spectre discret. Nous donnons aussi des caractérisations basées sur la notion de presque-périodicité, dans l'esprit de la condition donnée par Solomyak dans [133]. Dans l'énoncé suivant, nous notons \mathcal{N} l'ensemble des sous-ensembles localement finis de \mathbb{R}^d .

Théorème 3 (G.) *Soit χ un processus ponctuel stationnaire, ergodique et de carré intégrable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Le processus χ est presque sûrement un quasi-cristal.*
2. *Le système dynamique associé $(\mathcal{N}, (T_t)_t, P)$ a un spectre discret.*
3. *Tout sous-ensemble mesurable $A \subset \mathcal{N}$ vérifie :*

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ l'ensemble } \{t \in \mathbb{R}^d : P(A\Delta T_t(A)) \leq \varepsilon\} \text{ est relativement dense.} \quad (2.3)$$

La propriété 3 énonce une propriété de l'ensemble des indicatrices. Elle est équivalente à diverses propriétés similaires dans lesquelles on varie la classe des fonctions considérées. Nous renvoyons aux théorèmes 4.3 et 4.4 de [Gou05] pour des énoncés plus précis.

La preuve du théorème 3 repose sur des propriétés associées à la presque-périodicité (notamment des propriétés de stabilité) et sur le théorème 1 qui fait le lien entre la mesure de Palm et la mesure de diffraction.

Baake et Lenz – en s'appuyant sur cette même connexion entre mesure de Palm et mesure de diffraction établie dans [Gou03] – ont donné une preuve indépendante de cette caractérisation des quasi-cristaux en fonction du spectre du système dynamique [10]. Leur cadre est différent : l'espace ambiant est un groupe abélien σ -compact et localement compact. Le processus ponctuel est une mesure aléatoire uniformément (en espace et en l'aléa) localement bornée. Lenz et Strungaru [97] ont par la suite établi un résultat unifiant notre résultat et le résultat de Baake et Lenz.

Dans [Gou05], nous donnons, comme exemple d'application, une étude des ensembles modèles déformés introduits et étudiés par Bernuau et Duneau dans [22]. La construction de ces ensembles est basée sur celle des ensembles modèles. L'unique différence est que la projection d'un point x est perturbée par une fonction de sa projection sur F . Nous retrouvons simplement les résultats sûrs de Bernuau et Duneau et donnons également un nouveau résultat presque sûr.

Chapitre 3

Systèmes de particules en interaction

Ce chapitre présente les articles [Gou06] et [BGP08]. Le premier constitue le troisième chapitre de ma thèse.

3.1 Déplacement du plus proche voisin

Introduction. Considérons un système fini de particules sur le cercle évoluant suivant une dynamique markovienne et discrète en temps dont le pas élémentaire est le suivant :

- Un point X est choisi de manière uniforme sur le cercle. Nous l'appelons un point de migration.
- La particule la plus proche de X se déplace en X . Pour décrire cette étape, nous disons que le point de migration agit sur la configuration.

Dans [Gou06] nous avons introduit et étudié ce système de particules. Nous avons également introduit et étudié un système analogue sur la droite réelle.

Systèmes de particules sur le cercle. Modèle et résultats. Nous considérons dans ce paragraphe le modèle décrit dans l'introduction. Notons que le nombre de particules reste constant au cours du temps. Nous le notons d et supposons $d \geq 2$. Dans [Gou06] nous démontrons, par des techniques de couplage, que ce système converge exponentiellement vite vers l'unique loi invariante par la dynamique. En dehors du cas $d = 2$, nous n'avons pas de description précise de cette loi invariante.

Nous démontrons néanmoins l'existence d'une densité. Nous établissons également une propriété de répulsion entre les particules. Plus précisément, si M désigne la distance minimale entre deux particules sous la loi invariante, nous obtenons :

$$\log(P(M \leq x)) \sim -\frac{(\log(x))^2}{2\log(2)}, \quad x \rightarrow 0.$$

En particulier, pour tout entier n , $P(M \leq x)x^{-n}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. À titre de comparaison, notons que si les d particules étaient distribuées uniformément et indépendamment sur le cercle, nous aurions la minoration grossière $P(M \leq x) \geq C^{-1}x$ dans laquelle C désigne la circonférence du cercle. La répulsion est due au fait qu'il est relativement facile d'éloigner deux particules mais qu'il est au contraire difficile de les rapprocher. En effet, à chaque étape, la distance entre deux particules est au plus divisée par deux. Par ailleurs, cela n'arrive que si le point de migration est entre les deux particules, ce qui est d'autant plus improbable que la distance entre les deux particules est faible.

Nous obtenons également des contrôles sur les moments des distances entre particules successives. Ces contrôles nous sont utiles dans l'étude du modèle analogue sur la droite.

Système de particules sur la droite réelle. Modèle et résultats. Nous nous plaçons maintenant sur la droite réelle. Nous nous intéressons à des configurations infinies de particules. Plus précisément, une configuration est un sous-ensemble infini et localement fini de \mathbb{R} . Nous nous intéressons en particulier à des configurations aléatoires invariantes en loi par translation, c'est-à-dire des processus ponctuels stationnaires.

Nous définissons la dynamique via un processus de Poisson ponctuel ξ sur $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ admettant pour mesure d'intensité la mesure de Lebesgue. Pour chaque point (u, t) de ce processus, nous interprétons t comme l'instant auquel le point de migration u agit sur la configuration. Donnons-nous une configuration initiale χ_0 . Fixons $T > 0$. Nous définissons la configuration à l'instant T de la manière suivante. Pour tout $R > 0$, ordonnons les points de la restriction de ξ à $[-R, R] \times [0, T]$ suivant leur deuxième coordonnée. Nous obtenons une suite finie notée $(u_1^R, t_1^R), \dots, (u_{n(R)}^R, t_{n(R)}^R)$. Nous faisons alors agir successivement les points de migration $u_1^R, \dots, u_{n(R)}^R$ sur la configuration initiale χ_0 . Nous notons $\xi_T^R \cdot \chi_0$ la configuration obtenue. Nous démontrons que, dès que par exemple la configuration initiale χ_0 est une configuration aléatoire invariante en loi par translation et presque sûrement non vide, $\xi_T^R \cdot \chi_0$ converge presque sûrement, lorsque R tend vers l'infini, vers une configuration aléatoire que nous notons $\xi_T \cdot \chi_0$ et que nous appelons la configuration à l'instant T .

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 4 *Soit $\rho > 0$. Il existe une unique distribution de configuration aléatoire de densité presque sûre ρ qui soit invariante par translation et par la dynamique.*

Dans la suite de cette section, nous décrivons de manière informelle la preuve de l'existence d'une configuration invariante par la dynamique. L'unicité se prouve de manière classique.

Système de particules sur la droite réelle. Régularité. Soit $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus ponctuel stationnaires. Pour simplifier nous supposons que chacun de ces processus admet la mesure de Lebesgue pour mesure d'intensité. Nous les supposons également presque sûrement non vides. Nous supposons que cette suite de processus converge en loi vers un processus ponctuel χ :

$$\chi_n \rightarrow \chi. \quad (3.1)$$

La topologie utilisée sur les sous-ensembles localement finis de \mathbb{R} est une topologie locale : grossièrement, deux sous-ensembles sont proches si leurs restrictions à une grande boule centrée en l'origine sont proches pour la distance de Hausdorff. Le choix de cette topologie est dicté par des exigences de compacité. Fixons $T > 0$. Dans notre preuve de l'existence d'une distribution invariante par la dynamique, nous avons besoin de conditions permettant de déduire de (3.1) la convergence suivante :

$$\xi_T \cdot \chi_n \rightarrow \xi_T \cdot \chi. \quad (3.2)$$

Le fait que les particules puissent sauter sur des distances arbitrairement grandes rend ce résultat non immédiat. La connaissance de la configuration initiale dans une boule arbitrairement grande centrée en l'origine ne suffit pas pour obtenir des informations sur la configuration à un instant $T > 0$ dans un compact donné.

Notons m_{χ_n} la loi de la distance typique entre deux particules successives de χ_n ¹. Dans [Gou06], nous obtenons que la convergence (3.2) se déduit de la convergence (3.1) dès que la suite de lois m_{χ_n} est uniformément intégrable.

1. Voici une définition plus détaillée. Notons ψ l'application qui à un sous-ensemble localement fini Λ de \mathbb{R} associe le premier point de Λ strictement à droite de l'origine. La mesure de Palm d'un processus ponctuel stationnaire et intégrable est définie en (2.1). Avec nos hypothèses, la mesure de Palm de χ_n est une mesure de probabilité. La mesure m_{χ_n} est l'image de la mesure de Palm de χ_n par l'application ψ .

Nous donnons dans la suite de ce paragraphe les idées de la preuve de ce résultat. Il est facile de vérifier que, pour tout $R > 0$, $\xi_T^R \cdot \chi_n$ converge en loi vers $\xi_T^R \cdot \chi$ (car seul un nombre fini de points du processus de Poisson agissent). De par la définition de $\xi_T \cdot \chi_n$, nous avons :

$$\xi_T^R \cdot \chi_n \text{ converge presque sûrement vers } \xi_T \cdot \chi_n \quad (3.3)$$

lorsque R tend vers l'infini (et un résultat analogue est vrai pour χ). La convergence en loi de $\xi_T \cdot \chi_n$ vers $\xi_T \cdot \chi$ est donc acquise si la convergence (3.3) est uniforme en n en un certain sens. Pour montrer cela, considérons la fonction $f : R \mapsto \xi_T^R \cdot \chi_n$ pour un entier n donné et pour une réalisation donnée. Cette fonction est constante par morceaux. Elle ne peut changer de valeur que pour les R tels que ξ possède un point dans $\{-R, R\} \times [0, T]$. Prenons un tel R et notons (u, t) le point de $\xi \cap \{-R, R\} \times [0, T]$. Les configurations $f(R^-)$ et $f(R)$ sont obtenues en suivant les étapes suivantes :

1. On part de la configuration χ_n .
2. On fait agir les points de $\xi \cap [-R, R] \times [0, t[$ (c'est-à-dire que l'on fait agir les points de migration donnés par les premières coordonnées des points de $\xi \cap [-R, R] \times [0, t[$, dans l'ordre donné par leur seconde coordonnée).
3. On fait agir le point de migration u si on veut obtenir $f(R)$, on ne fait rien sinon.
4. On fait agir les points de $\xi \cap [-R, R] \times]t, T]$.

Rappelons que, pour la topologie considérée pour la convergence (3.3), deux configurations sont proches si elles sont proches sur une grande boule centrée en l'origine. Il s'agit donc de regarder si la différence induite par la troisième étape, qui concerne des particules situées à distance R de l'origine environ, peut, grâce à la dernière étape, se propager jusqu'aux particules appartenant à l'instant T à une boule B fixée. Nous démontrons pour cela deux résultats :

1. Les particules qui diffèrent après la troisième étape sont séparées des particules appartenant à l'instant T à la boule B par un nombre de particules de l'ordre de ρR , où ρ est la densité de χ_n .
2. La différence induite par la troisième étape ne peut se propager jusqu'à des particules distantes de plus de \sqrt{R} particules.

Le premier point est élémentaire. Le deuxième est lié au fait que la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire uniforme de $\{1, \dots, n\}$ est de l'ordre de \sqrt{n} . Ces deux faits suffisent pour établir la convergence (3.3). Pour obtenir l'uniformité, il faut garantir une certaine uniformité dans le premier fait (le deuxième ne dépend que du processus de Poisson, ce qui ne soulève pas de questions d'uniformité). Cette uniformité est acquise sous l'hypothèse d'uniforme intégrabilité des mesures $(m_{\chi_n})_n$ (cette hypothèse permet d'obtenir des minoration uniformes en n sur le cardinal de $\chi_n \cap [0, R]$). La convergence en loi de $\xi_T \cdot \chi_n$ vers $\xi_T \cdot \chi$ est donc acquise, ce qui conclut la preuve du lemme.

Système de particules sur la droite réelle. Preuve de l'existence d'une distribution invariante. L'existence de la distribution invariante par la dynamique est une conséquence des résultats suivants. Notons χ_d la configuration aléatoire de période d (sur la droite) associée naturellement à la configuration invariante comportant d particules sur le cercle. Nous montrons les résultats suivants :

1. Il existe une suite d_n tendant vers l'infini telle que la suite de configurations aléatoires χ_{d_n} converge en distribution vers une configuration aléatoire que nous notons χ .
2. Pour tout $T > 0$, la suite $\xi_T \cdot \chi_{d_n}$ converge en loi vers $\xi_T \cdot \chi$.
3. La suite de configurations aléatoires χ_d est asymptotiquement invariante pour la dynamique.

Le premier point est immédiat. Les deux suivants nécessitent de contrôler la configuration à un instant T à partir de la configuration initiale. Cela nécessite notamment, comme discuté dans le paragraphe précédant, un contrôle de la taille des écarts entre particules successives des configurations χ_d , contrôle que nous déduisons des bornes que nous avons obtenues sur les moments de ces écarts.

3.2 Modèles d'évolution de l'ADN avec dépendance du voisinage.

Une molécule d'ADN est composée de deux brins. Chacun de ces brins est une chaîne de nucléotides. Les nucléotides sont de quatre types : adénine, thymine, cytosine et guanine. Nous notons ces quatre types A, T, C et G . Nous modélisons alors une molécule d'ADN par une famille $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{A} = \{A, T, C, G\}$. Si par exemple $X_n = T$ nous disons que le site n est occupé par un nucléotide de type thymine.

Des erreurs peuvent se produire lors de la réplication d'une molécule d'ADN. L'une des erreurs possibles est la substitution : le nucléotide occupant un site donné n'a pas le même type dans la molécule initiale et dans sa copie. D'autres erreurs sont possibles, comme la suppression ou la copie d'une partie de la chaîne. Dans [BGP08] nous avons étudié une famille de modèles décrivant l'évolution d'une molécule d'ADN lors de réplications successives sous le seul effet des substitutions.

Dans les modèles les plus rudimentaires, les sites sont indépendants entre eux et l'évolution de chaque site est markovienne. Les faits expérimentaux montrent qu'au contraire les taux de substitution en un site donné dépendent de l'état du site considéré mais dépendent également fortement de l'état des sites voisins. Cette dépendance dans la dynamique induit une dépendance à l'équilibre. Cette dépendance à l'équilibre n'est bien entendu pas observée dans les modèles rudimentaires évoqués ci-dessus.

Introduire des dépendances locales dans la dynamique des modèles étudiés est donc nécessaire. Cela soulève cependant des difficultés. En effet l'évolution de l'état d'un site dépend a priori de l'état de toute la configuration. Pour ces raisons, peu de résultats théoriques étaient connus pour ce type de modèles.

Duret et Galtier [54] ont introduit et analysé un modèle que nous appelons Tamura + CpG dans [BGP08]. Dans ce modèle, les substitutions pour chaque site i sont les suivantes :

- Des substitutions dont le taux ne dépend que de l'état initial et final du site, suivant le modèle de Tamura.
- Des substitutions de G vers A lorsque le site $i - 1$ est dans l'état C . En considérant simultanément les sites $i - 1$ et i , ce sont des substitutions de l'état CG vers l'état CA .
- Des substitutions de C vers T lorsque le site $i + 1$ est dans l'état G . En considérant simultanément les sites i et $i + 1$, ce sont des substitutions de l'état CG vers l'état TG .

Duret et Galtier ont étudié la mesure d'équilibre du processus. Notons $F(\cdot)$ la fréquence à l'équilibre des polynucléotides. Par exemple $F(CG)$ désigne la proportion asymptotique de sites i tels que $X_i = C$ et $X_{i+1} = G$ lorsque $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est distribuée suivant la loi invariante pour la dynamique. Pour gérer les dépendances à longue portée a priori induite par le modèle, Duret et Galtier ont fait l'approximation suivante :

$$F(xyz) \approx F(xy)F(yz)/F(y)$$

dans laquelle x, y, z sont des éléments de \mathcal{A} . Ces approximations seraient exactes si, à l'équilibre, la suite des nucléotides était markovienne en espace. Ce n'est pas le cas mais des simulations numériques effectuées par Duret et Galtier montre que cette approximation n'est pas déraisonnable. Les travaux de Duret et Galtier – basés sur l'approximation précédente et sur des

simulations numériques – ont notamment mis en évidence des effets inattendus des substitutions CG vers CA et CG vers TG sur la fréquence $F(TA)$ du dinucléotide TA . Mentionnons également que Arndt et ses coauteurs ont considéré des modèles similaires, voir par exemple Arndt, Burge et Hwa [5] et Arndt et Hwa [6].

Dans [BGP08], nous avons introduit une large classe de modèles incluant le modèle Tamura + CpG. Nous montrons notamment que les fréquences à l'équilibre des polynucléotides de taille fixé sont solutions de systèmes linéaires finis et explicites. Il est donc possible de calculer analytiquement plusieurs quantités biologiquement pertinentes. Ces propriétés sont dues au fait que les dépendances locales de la dynamique ne créent en réalité que des dépendances limitées en espace. Ces propriétés d'indépendance pour des sites suffisamment éloignés étaient inattendues. Notons qu'elles limitent la pertinence biologique de cette classe de modèles.

L'étude mathématique de ces modèles ou de modèles plus généraux a été poursuivie par Bérard et Piau [18] et Falconnet [58].

Chapitre 4

Percolation, percolation de premier passage et compétition

Nous présentons dans cette partie les travaux [Gou07, Gou08, Gou09, Gou10, GM08, GM11]. Les articles [GM08] et [GM11] sont les résultats d'une collaboration avec Régine Marchand. Les articles concernant la percolation sont présentés dans la section 4.1. Ceux concernant principalement la percolation de premier passage et la compétition sont décrits dans la section 4.2.

4.1 Percolation

Nous présentons dans cette section les travaux [Gou08, Gou09, Gou10, GM11]. L'article [GM11] est le résultat d'une collaboration avec Régine Marchand.

4.1.1 Introduction

Modèle booléen. Le modèle booléen est un sous-ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Il est construit de la manière suivante. Nous partons d'un processus de Poisson ponctuel χ sur \mathbb{R}^d . Nous supposons ce processus stationnaire, c'est-à-dire invariant en loi sous l'action des translations. Sa mesure d'intensité s'écrit alors comme le produit d'une constante $\lambda \geq 0$ par la mesure de Lebesgue. La constante λ est la densité (ou l'intensité) de χ . En chaque point de χ , on centre une boule ouverte de rayon aléatoire. On suppose que les rayons des boules sont des copies indépendantes d'une variable aléatoire $R > 0$. On suppose également que les rayons sont indépendants de χ . Enfin, on note Σ la réunion des boules. C'est le modèle booléen sur \mathbb{R}^d de densité λ et de graines des copies d'une boule de rayon R . Ce modèle semble avoir été introduit par Gilbert en 1961 [68] pour modéliser la transmission d'ondes radioélectriques.

Nous écrirons parfois $\Sigma(\lambda\mu)$ où μ désigne la loi de R pour expliciter les paramètres.

Phases sous-critiques dans le modèle booléen. Nous nous intéressons aux propriétés de percolation de Σ . Nous renvoyons au livre de Meester et Roy [104] pour la percolation dans le modèle booléen et au livre de Grimmett [69] pour la percolation sur \mathbb{Z}^d . Signalons que la section 12.10 du livre de Grimmett est consacrée au modèle booléen.

Lorsque les rayons sont bornés, la percolation dans le modèle booléen partage de nombreuses propriétés avec la percolation indépendante sur les arêtes de \mathbb{Z}^d . En particulier, il existe un seuil $\lambda^c(R) \in (0, +\infty)$ séparant les deux phases suivantes :

- une phase sous-critique $(0, \lambda^c(R))$ dans laquelle toutes les composantes connexes de Σ sont bornées avec probabilité 1.

- une phase sur-critique $(\lambda^c(R), +\infty)$ dans laquelle Σ possède une composante connexe non bornée avec probabilité 1.

Le cas où les rayons ne sont pas bornés a été étudié pour la première fois par Hall en 1985 [71]. Il a noté qu’il n’existait pas toujours une phase sous-critique (autrement dit que le paramètre $\lambda^c(R)$ pouvait être nul). En effet, l’intégrabilité de R^d est une condition nécessaire pour l’existence d’une telle phase. Dans [71], Hall a montré que l’intégrabilité de R^{2d-1} était une condition suffisante. Dans [Gou08], nous avons montré que l’intégrabilité de R^d était une condition nécessaire et suffisante.

Il est possible de définir d’autres phases sous-critiques liées à des conditions d’intégrabilité de la taille des composantes connexes. Hall a montré que les conditions d’existence de ces différentes phases n’étaient pas identiques. C’est une autre différence avec le cas des rayons bornés ou avec le cas de la percolation classique sur \mathbb{Z}^d dans lesquels les différentes phases sous-critiques sont toutes identiques. Nous avons également étudié ce type de questions dans [Gou08].

Ces résultats sont présentés dans la section 4.1.2.

Seuil de percolation en fonction du rayon et en fonction de la dimension. Notons $c^c(R)$ la proportion de l’espace recouverte par le modèle booléen critique, c’est-à-dire lorsque l’on pose $\lambda = \lambda^c(R)$. C’est également la probabilité qu’un point fixé appartienne au modèle booléen critique. Notons que cette quantité ne change pas si l’on multiplie les rayons par une constante.

Une conjecture énonce que, au moins en petite dimension, la quantité $c^c(R)$ est minimisée lorsque R est constant. De manière vague, cette conjecture signifie que des boules de différentes tailles ont du mal à collaborer pour former de grandes composantes connexes. Cette conjecture est appuyée par des simulations numériques en petites dimensions et par des heuristiques en toute dimension. Dans [GM11], nous avons montré que cette conjecture était fautive en grande dimension. Nous avons pour cela étudié le comportement asymptotique de c^c en grande dimension.

Cette étude en grande dimensions avait déjà été menée par Penrose [121] dans le cas où R est constant. Il avait observé que, dans ce cas, le seuil était asymptotiquement donné par celui d’un processus de Galton-Watson associé. Cela signifie que les dépendances liées à la géométrie s’estompent en grande dimension. Cela se comprend par exemple bien dans le cas des chemins uniformes de longueur et de départ fixé sur \mathbb{Z}^d : la probabilité qu’ils soient auto-évitants tend vers 1 lorsque la dimension tend vers l’infini. Dans le cas où R n’est pas constant et dans les asymptotiques que nous avons considérées, ces dépendances liées à la géométrie ne s’annulent pas toujours et le seuil n’est pas toujours donné par celui du processus de Galton-Watson associé.

Ces résultats sont présentés dans la section 4.1.5.

Autres modèles. Dans les sections 4.1.3 et 4.1.4 nous étudions des modèles présentant moins d’indépendance ou dans lesquels le nombre de boules touchant un point fixé n’est plus nécessairement fini. Ces sections correspondent aux articles [Gou09] et [Gou10]. Nous nous intéressons en particulier au modèle booléen multi-échelle étudié notamment par Menshikov, Popov et Vachkovskaia dans [108, 109] et au modèle basé sur le mariage stable entre Poisson et Lebesgue introduit par Hoffman, Holroyd et Peres [80] et déjà étudié du point de vue de la percolation par Freire, Popov et Vachkovskaia [62].

4.1.2 Modèle booléen : transitions de phase

(a) Modèle et résultats

Percolation et seuils de transition. Le modèle booléen a été défini dans l'introduction (section 4.1.1) dont nous reprenons les notations. On s'intéresse à la taille des composantes connexes. On note S la composante connexe de Σ contenant l'origine. Par couplage, on vérifie que la probabilité que S soit non bornée est croissante en λ . On pose alors :

$$\lambda^c(R) = \sup\{\lambda > 0 : P_\lambda(S \text{ est non bornée}) = 0\} \in [0, +\infty].$$

Par stationnarité et par ergodicité, on vérifie les résultats suivants :

- Pour $\lambda < \lambda^c(R)$, avec probabilité 1, toutes les composantes connexes de Σ sont bornées.
- Pour $\lambda > \lambda^c(R)$, avec probabilité 1, l'une des composantes connexes de Σ est non bornée.

On peut par ailleurs démontrer qu'avec probabilité 1 il y a au plus une composante connexe non bornée. C'est le théorème 3.6 dans le livre de Meester et Roy [104]. En dimension 2, lorsque les rayons sont constants et lorsque $\lambda = \lambda^c(R)$ il n'y a pas percolation (voir Alexander [3]). Ce résultat semble avoir également été établi en dimension suffisamment grande (voir Tanemura [134]). Il n'est pas connu pour les dimensions intermédiaires.

Si A et B sont deux sous-ensembles de \mathbb{R}^d , on écrit $A \leftrightarrow_\Sigma B$ s'il existe un chemin dans Σ de A à B . On note $S(r)$ la sphère euclidienne de \mathbb{R}^d de rayon r centrée en 0 :

$$S(r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = r\}.$$

Le seuil critique $\lambda^c(R)$ peut également être défini ainsi :

$$\lambda^c(R) = \sup\{\lambda > 0 : P_\lambda(\{0\} \leftrightarrow_\Sigma S(r)) \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow \infty\} \in [0, +\infty].$$

On définit un autre seuil de la façon suivante :

$$\widehat{\lambda}^c(R) = \sup\{\lambda > 0 : P_\lambda(S(r/2) \leftrightarrow_\Sigma S(r)) \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow \infty\} \in [0, +\infty].$$

Pour tout réel $s > 0$, on introduit enfin le seuil :

$$\lambda_D^s(R) = \sup\{\lambda > 0 : E_\lambda(D^s) < \infty\} \in [0, +\infty]$$

où D désigne le diamètre de S . Voici quelques inégalités élémentaires entre ces seuils :

$$\widehat{\lambda}^c(R) \leq \lambda^c(R)$$

et, pour tout $s > 0$:

$$\lambda_D^s(R) \leq \lambda^c(R).$$

On a également¹, pour tout $s > d - 1$:

$$\lambda_D^s(R) \leq \widehat{\lambda}^c(R). \tag{4.1}$$

1. Notons que l'inégalité FKG permet de montrer $P(\{0\} \leftrightarrow_\Sigma S(r)) \geq CP(S(1) \leftrightarrow_\Sigma S(r))$ pour une constante $C > 0$ indépendante de r .

Cas des rayons bornés. Dans le cas où les rayons sont bornés, on montre facilement que $\lambda^c(R)$ est un réel strictement positif. On dispose par ailleurs du théorème important suivant. Sa preuve repose sur le résultat analogue dans le cas discret, qui a été établi indépendamment par Menshikov [106] en 1986 et par Aizenman et Barsky [2] en 1987.

Théorème 5 (Menshikov et al) *On suppose le rayon aléatoire R borné. Alors pour tout $\lambda < \lambda^c(R)$, il existe deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que, pour tout $x > 0$:*

$$P_\lambda(D > x) \leq C_1 \exp(-C_2 x).$$

Ce théorème est une combinaison de résultats de Zuev et Sidorenko [136]-[137], Menshikov [106], Menshikov, Molchanov et Sidorenko [107], Menshikov et Sidorenko [110] et Meester, Roy et Sarkar [105]. La preuve est exposée dans le livre de Meester et Roy [104]. C'est une conséquence du théorème 3.5 et du lemme 3.3 de ce livre. Voir également la section 12.10 du livre de Grimmett [69]².

Du théorème 5, on déduit que, lorsque les rayons sont bornés, tous les seuils introduits précédemment coïncident et sont donc – comme $\lambda^c(R)$ – non triviaux :

$$\text{Si } R \text{ est bornée alors, pour tout } s > 0, \lambda_D^s(R) = \widehat{\lambda}^c(R) = \lambda^c(R) \in (0, +\infty).$$

Dans la suite de la section 4.1.2 nous nous intéressons au cas où les rayons ne sont plus supposés bornés.

Non trivialité de $\lambda^c(R)$ et de $\widehat{\lambda}^c(R)$. On montre facilement que $\lambda^c(R)$ est toujours fini, quelle que soit la loi de R . Cela peut se faire par exemple en couplant le modèle booléen avec le modèle de percolation indépendante sur les sites de \mathbb{Z}^d . La construction est détaillée dans la remarque qui suit la preuve du théorème 3.3 dans [104]. Cela ramène le problème au problème équivalent dans le cas discret ; ce dernier s'étudie simplement par des arguments de dualité et de comptages de chemins.

La stricte positivité de $\lambda^c(R)$ dépend par contre de la loi μ . La question a été étudiée pour la première fois par Hall en 1985 dans [71] (voir aussi [72] et [104]). Il a montré les deux résultats suivants :

- $E(R^d)$ finie est une condition nécessaire pour $\lambda^c(R) > 0$.
- $E(R^{2d-1})$ finie est une condition suffisante pour $\lambda^c(R) > 0$.

Le premier point est élémentaire. On montre par des calculs explicites sous l'hypothèse $E(R^d)$ infinie que, pour tout $\lambda > 0$, $\Sigma = \mathbb{R}^d$ presque sûrement³. Le deuxième point est le résultat principal de l'article de Hall. L'idée est de dominer une partie des boules aléatoires incluses dans S par un processus de branchement sous-critique.

Dans [126], Sapozhnikov améliore la condition suffisante de Hall. Il montre que $\lambda^c(R)$ est strictement positive dès qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(R^{d+\varepsilon})$ est finie.

Dans [Gou08], on montre que la condition nécessaire identifiée par Hall est également suffisante⁴. Le résultat suivant est un renforcement de l'énoncé donné dans [Gou08] mais il est essen-

2. Le théorème 12.35 de [69] est énoncé dans le cas des rayons constants. Il énonce que l'espérance du nombre de boules de la composante connexe contenant l'origine est finie dès que $\lambda < \lambda_c(R)$. La décroissance exponentielle du diamètre s'en déduit en utilisant par exemple l'inégalité BK. Voir le théorème 6.1 de [69] dans le cas discret ou le théorème 2.4 de [104] dans le cas continu.

3. Un résultat plus général est démontré dans [104] : pour tout processus ponctuel stationnaire presque sûrement non vide, si $E(R^d)$ est infini, alors $\Sigma = \mathbb{R}^d$ avec probabilité 1 ; c'est l'objet de la proposition 7.3 du livre.

4. C'est le théorème 2.1 de [Gou08].

tiellement implicite dans la preuve. Il est par contre une conséquence de résultats de [Gou09]⁵. Nous donnons quelques idées des preuves des résultats ci-dessous dans la section (b).

Théorème 6 (G.) *La condition $E(R^d) < \infty$ est une condition nécessaire et suffisante pour $\lambda^c(R) > 0$. De plus, si $E(R^d)$ est finie on a :*

$$\lambda^c(R) \geq \widehat{\lambda}^c(R) \geq \frac{C_d}{\sup_{r>0} r^d P(R \geq r)}$$

pour une constante strictement positive C_d qui dépend uniquement de la dimension d .

La densité recouverte critique $c^c(R)$. Il est commode de regarder le seuil critique $\lambda^c(R)$ à travers la quantité $c^c(R)$ définie par :

$$c^c(R) = 1 - \exp\left(-\lambda^c(R)E(v_d R^d)\right) \quad (4.2)$$

où v_d désigne le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d . C'est la probabilité qu'un point fixé appartienne au modèle booléen critique, c'est-à-dire lorsque $\lambda = \lambda^c(R)$. Par ergodicité, on constate que c'est également la proportion volumique de l'espace recouverte par le modèle booléen critique. La quantité $c^c(R)$ s'appelle la densité recouverte critique (*critical covered volume*).

Cette quantité possède des propriétés d'invariances agréables. En particulier, si on multiplie les rayons par une constante a , alors la densité recouverte critique reste inchangée. Cela se comprend en observant les deux faits suivants : un modèle booléen reste critique lorsque l'on change d'échelle ; la densité d'un modèle booléen reste inchangée lorsque l'on change d'échelle.

Voici une conséquence de la minoration obtenue dans le théorème 6 :

$$c^c(R) \geq 1 - \exp(-C_d v_d).$$

Ainsi, quelle que soit la loi des rayons, le modèle booléen ne percole pas tant qu'une certaine proportion de l'espace n'est pas recouverte. Une autre conséquence est que la densité recouverte critique associée à une v.a. R peut-être arbitrairement proche de 1. Nous renvoyons à la section 4.1.5.(a).

Non trivialité de $\lambda_D^s(R)$. Dans [109], Menshikov, Popov et Vachkovskaia ont étudié un modèle de percolation multi-échelle. Ils avaient pour cela besoin d'une condition assurant $\lambda_D^s > 0$ où $s \geq 1$ est un entier. Ils ont obtenu la condition suffisante suivante : $E(R^{2sd})$ finie. Dans [Gou08] nous améliorons ce résultat en donnant une condition nécessaire et suffisante. Le théorème suivant est un renforcement du théorème 2.2 de [Gou08], mais il se déduit facilement de sa preuve ou en combinant le théorème 6 de ce mémoire avec le théorème 2.9 de [Gou09].

Théorème 7 (G.) *Soit $s > 0$ un réel. La condition $E(R^{d+s})$ finie est une condition nécessaire et suffisante pour $\lambda_D^s > 0$. De plus, on a :*

$$\lambda_D^s(R) \geq \widehat{\lambda}^c(R) \text{ si } E(R^{d+s}) \text{ est fini.}$$

Rappelons qu'une minoration de $\widehat{\lambda}^c(R)$ est donnée par le théorème 6.

En combinant l'inégalité du théorème avec l'inégalité (4.1), on obtient $\lambda_D^s(R) = \widehat{\lambda}^c(R)$ pour tout $s > d - 1$ si $E(R^{d+s})$ est finie. Déterminer des conditions sous lesquelles $\widehat{\lambda}^c(R)$ coïncide avec $\lambda^c(R)$ reste ouvert.

Le théorème 7 découle simplement des résultats intermédiaires obtenus pour établir le théorème 6.

5. Le renforcement est une conséquence des théorèmes 2.7 et 2.8 de [Gou09] avec, par exemple, $\rho = 10$, $(a_n) = (0)$ et $(b_n) = (b_0)$ avec b_0 suffisamment petit.

Non trivialité d'une dernière famille de seuils. Notons N le nombre de boules de Σ contenues dans S . Pour tout réel $s > 0$ on introduit le seuil critique suivant :

$$\lambda_N^s(R) = \sup\{\lambda > 0 : E_\lambda(N^s) < \infty\} \in [0, +\infty].$$

La condition $E(R^{d(1+s)})$ finie est une condition nécessaire et suffisante pour $\lambda_N^s(R) > 0$. Pour $s = 1$ c'est un résultat de Hall [71] (voir aussi [72] et [104]). Pour s entier supérieur à 1 c'est un résultat de Błaszczyszyn, Rau et Schmidt [27]. Pour s réel strictement positif c'est une conséquence relativement simple du théorème 7. On peut en effet montrer que $E(N^s)$ est finie dès que $E(D^{ds})$ est finie et on peut par ailleurs montrer directement que $E(N^s)$ est nécessairement infinie si $E(R^{d(1+s)})$ infinie. Nous n'avons pas étudié ces aspects du problème et n'avons par exemple pas cherché à préciser les liens entre les λ_D et les λ_N .

(b) Quelques idées de preuves

Dans tous ces résultats, la principale difficulté réside dans la preuve que les conditions d'intégrabilités entraînent la stricte positivité des seuils. La difficulté vient de l'existence de boules arbitrairement grandes qui crée des dépendances à longues portées.

Comparaison avec un processus de branchement. Les preuves de [27], [71] et [109] reposent toutes sur l'introduction d'un processus de branchement multitype qui domine le processus de percolation.

Pour illustrer cette technique, montrons que S est borné pour λ suffisamment petit quand les rayons sont constants. On suppose, pour fixer les idées, que l'on a $R = 1$. On considère \tilde{S} , la composante connexe de $\Sigma \cup B(0, 1)$ contenant l'origine. On considère la construction suivante de \tilde{S} .

- L'unique boule de génération 0 est la boule centrée en 0.
- Successivement, pour tout entier $n \geq 0$:
 - On numérote arbitrairement les $N(n)$ boules de la génération n : $B_1^n, \dots, B_{N(n)}^n$.
 - Pour tout i entre 1 et $N(n)$, les enfants de B_i^n sont les boules de Σ qui touchent B_i^n sans toucher : ni une boule de génération strictement inférieure à n ni une boule de la forme B_j^n pour $j < i$.
 - Les boules de génération $n + 1$ sont tous les enfants d'une boule de génération n .

Remarquons que le nombre de boules de Σ qui touchent une boule fixée de rayon 1 suit une loi de Poisson de paramètre $m = \lambda|B(0, 2)|$. On vérifie que le processus $N(n)$ est stochastiquement dominé par un processus de Galton-Watson de loi de reproduction une loi de Poisson de paramètre m . Pour λ suffisamment petit, ce processus de Galton-Watson est sous-critique et s'éteint presque sûrement. Ainsi, avec probabilité 1, le processus $N(n)$ s'éteint, donc \tilde{S} est borné et donc S est borné. On a ainsi montré $\lambda^c(1) > 0$ et, plus précisément, $\lambda^c(1) \geq |B(0, 2)|^{-1}$. La preuve donne en fait $E(N)$ fini pour λ suffisamment petit. On a donc montré $\lambda_N^1(1) > 0$.

Lorsque R n'est pas constant, on peut avec les mêmes idées dominer stochastiquement le nombre de boules incluses dans S par la population totale d'un processus de Galton-Watson à plusieurs types. Les types correspondent aux rayons des boules. Sous l'hypothèse $E(R^{2d})$ finie, le processus est sous-critique pour λ suffisamment petit. Cela mène à $E(N)$ finie pour λ suffisamment petit. On obtient donc $\lambda_N^1 > 0$. C'est l'un des résultats de Hall [71].

Sous l'hypothèse plus faible $E(R^{2d-1})$ finie et si l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée, on a $\lambda_N^1 = 0$ et donc $E(N) = \infty$ pour tout λ . Pour montrer que S est néanmoins borné presque sûrement pour λ suffisamment petit, on introduit N' qui compte le nombre de boules de S qui ne sont incluses dans aucune autre boule de S . Notons que S est la réunion de ces boules et que S est donc borné dès que N' est fini. On montre alors par des techniques semblables

aux précédentes que N' est fini presque sûrement pour λ suffisamment petit. Par la remarque précédente, cela montre $\lambda^c(R) > 0$, le résultat principal de Hall [71].

Changement d'échelle - Renormalisation - Preuve du théorème 6. Nous supposons dans la suite que $E(R^d)$ est finie. Sous cette hypothèse le théorème 6 assure que S est borné presque sûrement pour λ suffisamment petit. Nous donnons dans la suite les idées de la preuve de ce résultat. Dans les grandes lignes, la stratégie est de comparer les probabilités de percoler à différentes échelles et de traiter les probabilités de présence de grandes boules comme des termes d'erreurs dans les comparaisons numériques.

Pour x dans \mathbb{R}^d et $\beta > 0$ on introduit l'évènement suivant :

$$G(x, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} \text{On peut relier } B(x, \beta) \text{ et le complémentaire de } B(x, 2\beta) \\ \text{avec des boules de } \Sigma \text{ de rayons inférieure à } \beta \end{array} \right\}.$$

L'évènement $G(x, \beta)$ ne dépend que des boules de Σ pouvant toucher $B(x, 2\beta)$. Il ne dépend donc que des boules centrées en des points de $B(x, 3\beta)$. C'est donc un évènement local. Cela permet de récupérer de l'indépendance : $G(x, 3\beta)$ et $G(y, 3\beta)$ sont indépendants dès que la distance entre x et y dépasse 6β .

Par stationnarité, la probabilité de $G(x, \beta)$ ne dépend pas de x et on la note $\pi_\lambda(\beta)$. Rappelons que D désigne le diamètre de S . On montre, pour tout $\beta > 0$:

$$P_\lambda(D > 4\beta) \leq \pi_\lambda(\beta) + C\lambda \int_{[\beta, +\infty)} r^d \mu(dr)$$

où C est une constante ne dépendant que de la dimension. Le terme faisant intervenir l'intégrale majore la probabilité qu'une boule de rayon plus grand que β ne vienne interférer. Notre objectif est de montrer que, pour λ suffisamment petit, S est presque sûrement borné. Par l'inégalité précédente, il suffit donc de montrer que, pour λ suffisamment petit, $\pi_\lambda(\beta)$ converge vers 0.

La clé est dans l'inégalité suivante, valable pour tout $\beta > 0$:

$$\pi_\lambda(10\beta) \leq C\pi_\lambda(\beta)^2 + C\lambda \int_{[\beta, 10\beta]} r^d \mu(dr) \quad (4.3)$$

où C est une constante qui ne dépend que de la dimension. À partir de cette inégalité, on conclut de la manière suivante. En multipliant par C , on obtient :

$$C\pi_\lambda(10\beta) \leq (C\pi_\lambda(\beta))^2 + C^2\lambda \int_{[\beta, +\infty]} r^d \mu(dr). \quad (4.4)$$

Le terme faisant intervenir l'intégrale est borné. En choisissant λ suffisamment petit, on peut donc s'assurer qu'il est majoré par $1/4$ pour tout $\beta > 0$. On fixe un tel λ . On montre facilement que, pour β suffisamment petit, $C\pi_\lambda(\beta)$ est majoré par $1/2$. Par (4.4) on en déduit alors que $C\pi_\lambda(\beta)$ est majoré par $1/2$ pour tout β . Le fait que le terme faisant intervenir l'intégrale converge vers 0 allié au fait que l'autre terme contracte les petites valeurs vers 0 permet alors de montrer que $C\pi_\lambda(\beta)$ converge vers 0. De là et de la discussion qui précède découle la partie difficile du théorème 6.

Si de plus $E(R^s)$ est finie pour un $s > d$, on a alors une majoration sur la vitesse de convergence vers 0 du terme faisant apparaître l'intégrale. On en déduit une majoration de la vitesse à laquelle $C\pi_\lambda(\beta)$ tend vers 0. De là et de la discussion qui précède découle la partie difficile du théorème 7.

Il nous reste à établir l'inégalité (4.3). Notons $S(r)$ la sphère centrée en l'origine et de centre $r : S_r = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = r\}$. On fixe K , sous-ensemble fini de $S(10)$ tel que $S(10)$ est la réunion

des boules de rayon 1 centrées en les points de K . On fixe L , sous-ensemble fini de $S(20)$ tel que $S(20)$ est la réunion des boules de rayon 1 centrées en les points de L . On a alors, pour tout $\beta > 0$:

$$G(0, 10\beta) \setminus H(\beta) \subset \left(\bigcup_{k \in K} G(\beta k, \beta) \right) \cap \left(\bigcup_{l \in L} G(\beta l, \beta) \right) \quad (4.5)$$

où $H(\beta)$ est un évènement vérifié lorsqu'une grosse boule interfère. L'idée est la suivante (voire la figure 4.1). On suppose que $G(0, 10\beta) \setminus H(\beta)$ est vérifié. Il existe alors un chemin de petites

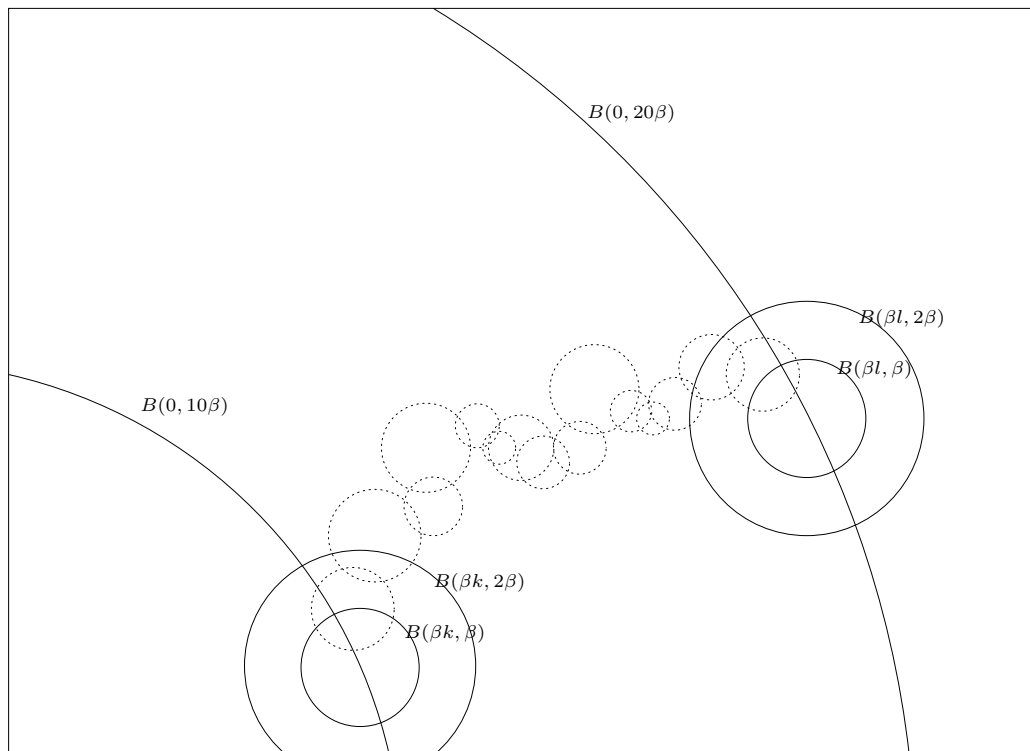


FIGURE 4.1 – Preuve de (4.5)

boules de Σ allant de $S(10\beta)$ au complémentaire de $B(20\beta)$. Mais $S(10\beta)$ est recouverte par des boules de rayon β centrées en les points de βK . On en déduit que l'un des $G(\beta k, \beta)$ est réalisé. Similairement, l'un des $G(\beta l, \beta)$ est réalisé. Ainsi, (4.5) est prouvée. Pour en déduire (4.3) il reste :

- à majorer $P(H(\beta))$, ce qui fait apparaître le terme avec l'intégrale.
- à noter que pour k et l fixés, βk et βl sont suffisamment éloignés l'un de l'autre pour que $G(\beta k, \beta)$ et $G(\beta l, \beta)$ soient indépendants. On utilise pour cela le fait que ces évènements sont locaux et que le processus sous-jacent est un processus de Poisson.
- à noter que le produit des cardinaux de K et de L ne dépend que de la dimension.

Dans [126], Sapozhnikov utilise également une stratégie multi-échelle pour établir qu'il existe une phase sous-critique dès que $E(R^{d+\varepsilon})$ est finie pour un $\varepsilon > 0$. L'implémentation de cette stratégie est cependant très différente. Nous renvoyons à [126].

4.1.3 Modèle booléen multi-échelle et modèles poissonniens plus généraux

(a) Modèle booléen multi-échelle

Reprenons le modèle booléen Σ défini dans la section précédente. Rappelons que λ désigne la densité de l'ensemble des centres et que les rayons des boules sont des copies d'une variable aléatoire R . Nous nous donnons $(\Sigma_n)_{n \geq 0}$, une suite de copies indépendantes de Σ . Nous considérons $\rho > 1$ un facteur de changement d'échelle. Le modèle booléen multi-échelle associé est le sous-ensemble aléatoire de \mathbb{R}^d suivant :

$$\Sigma^\rho = \bigcup_{n \geq 0} \rho^{-n} \Sigma_n(\lambda).$$

Si $E(R^d)$ est infinie, nous savons que chaque Σ_n , et donc Σ^ρ , est égal à \mathbb{R}^d avec probabilité 1. Dans la suite, nous supposons que $E(R^d)$ est finie.

On peut vérifier facilement que 0 appartient avec probabilité 1 à Σ^ρ . Par conséquent, la mesure de Lebesgue du complémentaire de Σ^ρ est presque sûrement 0. Nous allons néanmoins voir que les composantes connexes de Σ^ρ peuvent être bornées.

Ce modèle semble avoir été introduit pour la première fois comme un modèle de failles dans les milieux géophysiques dans les années 80. Nous renvoyons à l'article de Molchanov, Pisarenko et Reznikova [113] pour une présentations de ces études. Pour des résultats plus récents, nous renvoyons à [29], [104], [105], [108], [109] et [123]. Ce modèle est par ailleurs proche d'un modèle discret introduit par Mandelbrot [101]. Nous renvoyons à l'article de synthèse de L. Chayes [38] et, pour des résultat plus récents, à [28], [119] et [135].

Le seuil critique $\lambda^c(1)$ a été défini dans la section précédente. Meester et Roy [104] ont étudié ce modèle en dimension 2 quand $R = 1$. Ils ont établi les deux résultats suivants :

1. Soit $\rho > 1$. Si $\lambda > 0$ est suffisamment petit, alors Σ^ρ est sous-critique⁶.
2. Soit $\lambda < \lambda^c(1)$. Si ρ est suffisamment grand, alors Σ^ρ est sous-critique⁶.

Dans [108] et [109], Menshikov, Popov et Vachkovskaia ont établi des résultats dans l'esprit du deuxième résultat de Meester et Roy. Disons que Σ^ρ percole si, avec probabilité 1, au moins l'une de ses composantes connexes est non bornée. Ainsi, si Σ^ρ ne percole pas, avec probabilité 1, toutes ses composantes connexes sont bornées. Pour énoncer leur résultat nous avons besoin d'introduire la condition de sous-auto-similarité suivante (avec la convention $0/0 = 0$) :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{r \geq 1/2} \frac{\rho^d P(R \geq \rho r)}{P(R \geq r)} = 0 \quad (4.6)$$

ainsi que le seuil critique suivant :

$$\tilde{\lambda}^c(R) = \sup \left\{ \lambda > 0 : r^d P_\lambda \left(\{0\} \leftrightarrow_{\Sigma(\lambda\mu)} S(r) \right) \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow \infty \right\}.$$

Faisons quelques remarques sur ce seuil :

1. On a toujours $\tilde{\lambda}^c(R) \leq \hat{\lambda}^c(R) \leq \lambda^c(R)$.
2. Si R est borné, alors par le théorème 5 ces trois seuils sont égaux.
3. Avec les idées de [Gou08], on peut vérifier que $\tilde{\lambda}^c(R)$ est strictement positif si et seulement si :

$$r^d E(R^d 1_{R \geq r}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } r \rightarrow \infty.$$

6. Σ^ρ sous-critique signifie ici qu'avec probabilité positive $[0, 1]^2 \setminus \Sigma^\rho$ contient une composante connexe qui intersecte les bords droits et gauches de $[0, 1]^2$

Le résultat de Menshikov, Popov et Vachkovskaia démontré dans [109] est le suivant :

Théorème 8 (Menshikov, Popov et Vachkovskaia) *Soit $d \geq 2$. On suppose que la loi de R vérifie (4.6) et que $\tilde{\lambda}^c(R)$ est strictement positif. Pour tout $\lambda < \tilde{\lambda}^c(R)$, pour tout ρ suffisamment grand (dépendant de λ), Σ^ρ ne percole pas.*

Dans le cas où R est borné, les conditions (4.6) et $\tilde{\lambda}^c(R) > 0$ sont toujours vérifiées. Par ailleurs on a dans ce cas égalité entre $\tilde{\lambda}^c(R)$ et $\lambda^c(R)$. L'énoncé se simplifie donc ainsi : si R est borné et si $\lambda < \lambda^c(R)$, pour tout ρ suffisamment grand, Σ^ρ ne percole pas. Cet énoncé dans le cas $R = 1$ constitue le résultat principal de [108].

Une conséquence du théorème précédent est que la densité recouverte critique $c^c(R)$ définie par (4.2) peut-être arbitrairement proche de 1. Nous renvoyons à la section 4.1.5.(a) pour plus de détails.

Dans [Gou10] pour le point 1.(a) et [Gou09] pour les autres points, nous prouvons le résultat suivant :

Théorème 9 (G.) *Soit $d \geq 2$.*

1. *Supposons*

$$E\left(R^d \max(0, \ln(R))\right) < \infty. \quad (4.7)$$

Alors $\hat{\lambda}^c(R)$ est strictement positif et Σ^ρ ne percole pas⁷ dans les deux cas suivants :

- (a) *Pour tout $\lambda < \hat{\lambda}^c(R)$ et tout $\rho > 1$ suffisamment grand (fonction de λ).*
- (b) *Pour tout $\rho > 1$ et tout $\lambda > 0$ suffisamment petit (fonction de ρ).*

2. *Supposons que (4.7) n'est pas vérifiée. Alors, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $\rho > 1$, Σ^ρ percole.*

Le deuxième point montre que la condition d'intégrabilité faite dans le premier point est optimale. Il montre également que la condition (4.7) est une conséquence des hypothèses du théorème 8⁸. Comme de plus $\tilde{\lambda}^c(R) \leq \hat{\lambda}^c(R)$, le point 1.(a) est une généralisation du théorème 8.

En combinant le théorème 9 et les théorèmes 2.9 et 1.2 de [Gou09] on peut obtenir facilement des résultats sur les moments du diamètre de la composante connexe de Σ^ρ contenant l'origine (voir le théorème 5 de [Gou10]).

Nous donnons les idées de la preuve du point 1.(a) et celles de la preuve du résultat de Menshikov, Popov et Vachkovskaia dans la section (c). Les autres points découlent d'un résultat pour des modèles poissonniens que nous énonçons dans la section suivante.

(b) Modèles poissonniens

Soit μ une mesure localement finie sur $(0, +\infty)$. Soit $\lambda > 0$ un réel. Soit ξ un processus de Poisson ponctuel sur $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ dont la mesure d'intensité est $\lambda |\cdot| \mu$ où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . On s'intéresse à l'ensemble aléatoire suivant :

$$\Sigma = \bigcup_{(c,r) \in \xi} B(c, r).$$

7. Notons $\hat{\lambda}^c(\rho, R)$ le seuil $\hat{\lambda}^c$ correspondant au modèle multi-échelle. Les points (a) et (b) peuvent être renforcés ainsi :

- a' $\hat{\lambda}^c(\rho, R) \rightarrow \hat{\lambda}^c(R) > 0$ lorsque $\rho \rightarrow \infty$.
- b' $\hat{\lambda}^c(\rho, R) > 0$ pour tout $\rho > 1$.

8. On peut par exemple montrer que (4.7) est vérifiée dès que $\tilde{\lambda}^c(R)$ est strictement positif ou dès que (4.6) est vérifiée.

C'est le modèle poissonnien dirigé par la mesure $\lambda\mu$. Dans le cas où μ est une mesure de probabilité, on retrouve le modèle booléen introduit dans la section 4.1.2.

Le modèle booléen multi-échelle est un exemple de modèle poissonnien. Si ν désigne la loi de R , alors Σ^ρ est dirigé par la mesure $\lambda\mu$ où

$$\mu(\cdot) = \sum_{n \geq 0} \rho^{nd} \nu(\rho^n \cdot).$$

Le théorème suivant appliqué à cette mesure donne les points 1.(a) et 2 du théorème 9.

Nous introduisons des seuils critiques $\lambda^c(\mu)$, $\widehat{\lambda}^c(\mu)$ et $\lambda_D^s(\mu)$ similaires à ceux introduits pour le modèle booléen (c'est-à-dire le cas où μ est une mesure de probabilité). Dans ce cadre, nous montrons dans [Gou09] le résultat suivant, qui généralise le théorème [Gou08]⁹ :

Théorème 10 (G.) *Soit $d \geq 2$. Alors $\lambda^c(\mu)$ est strictement positif si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Le supremum $\sup_{r > 0} r^d \mu([r, +\infty))$ est fini.*

2. *L'intégrale $\int_{[1, +\infty)} \beta^d \mu(d\beta)$ est finie.*

De plus, il existe une constante C , ne dépendant que de la dimension d , tel que :

$$\lambda^c(\mu) \geq \widehat{\lambda}^c(\mu) \geq \frac{C}{\sup_{r > 0} r^d \mu([r, +\infty))} \text{ si } \int_{[1, +\infty)} \beta^d \mu(d\beta) < \infty.$$

En dimension 1, S est non bornée avec probabilité strictement positive si et seulement si $\Sigma = \mathbb{R}$ avec probabilité 1. Ce problème de recouvrement a été résolu par Shepp [129] qui a prouvé que $\Sigma = \mathbb{R}$ presque sûrement si et seulement si :

$$\int_{(0,1]} \exp\left(2 \int_{[u, +\infty)} (r-u) \lambda\mu(dr)\right) du = +\infty.$$

En dimension supérieure il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante simple pour le recouvrement. Il existe par contre des conditions nécessaires et des conditions suffisantes. Ces conditions, bien que différentes, sont suffisamment proche pour que le seuil critique pour le recouvrement soit explicitement connu. Le comportement au seuil critique dépend par contre de μ . Quand l'espace n'est pas recouvert, des résultats sur la dimension fractale de son complémentaire sont également connus. Le livre de Kahane [84] consacre un chapitre à ce sujet. Nous renvoyons également aux articles de El Hélou [57] et Biermé et Estrade [24].

Faisons une petite remarque sur la première hypothèse du théorème 10. Elle équivaut à la condition suivante¹⁰ :

$$\sup_{r > 0} r^d \mu([r, 10r]) < \infty.$$

La probabilité que 0 appartienne à une boule de Σ de rayon compris entre r et $10r$ est :

$$1 - \exp\left(-\lambda \int_{[r, 10r]} v_d \beta^d \mu(d\beta)\right).$$

La première hypothèse du théorème signifie donc que ces probabilités sont majorées uniformément par une constante strictement inférieure à 1. Cette hypothèse s'interprète donc en terme de densité recouverte critique .

9. C'est le théorème 1.1 de [Gou09], renforcé par une applications des théorèmes 2.7 et 2.8 de [Gou09] avec, par exemple, $\rho = 10$, $(\alpha_n)_n = (10/n)_n$ et $(\beta_n)_n = (1/n)_n$.

10. C'est le lemme 3.2 de [Gou09].

Dans [Gou09] nous prouvons également la généralisation suivante du théorème 7¹¹ :

Théorème 11 (G.) *Soit $d \geq 2$. Soit $s > 0$ un réel positif. Alors λ_D^s est strictement positif si et seulement si :*

1. *Le supremum $\sup_{r>0} r^d \mu([r, +\infty))$ est fini.*

2. *L'intégrale $\int_{[1, +\infty)} \beta^{d+s} \mu(d\beta)$ est finie.*

De plus, on a :

$$\lambda_D^s(\mu) \geq \widehat{\lambda}^c(\mu) \text{ si } \int_{[1, +\infty)} \beta^{d+s} \mu(d\beta) \text{ est finie.}$$

Rappelons qu'une minoration de $\widehat{\lambda}^c(\mu)$ est fournie par le théorème 10.

(c) Quelques idées de preuves

Idées de la preuve des théorèmes 10 et 11 Comme dans les résultats pour le modèle booléen, la difficulté réside dans la preuve que les conditions d'intégrabilité sont des conditions suffisantes de non percolation.

Reprenons une partie des idées de la preuve du théorème 6 exposées dans la section 4.1.2.(b). Pour x dans \mathbb{R}^d et $\beta > 0$ nous avons introduit l'évènement suivant :

$$G(x, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} \text{On peut relier } B(x, \beta) \text{ et le complémentaire de } B(x, 2\beta) \\ \text{avec des boules de } \Sigma \text{ de rayons inférieurs à } \beta \end{array} \right\}.$$

Nous avons noté $\pi_\lambda(\beta)$ la probabilité de $G(\cdot, \beta)$. La clé de la preuve était l'inégalité suivante, valable pour tout $\beta > 0$:

$$\pi_\lambda(10\beta) \leq C\pi_\lambda(\beta)^2 + C\lambda \int_{[\beta, 10\beta]} r^d \mu(dr). \quad (4.8)$$

Les hypothèses du théorème 6 permettait alors de déduire de cette inégalité que π_λ convergeait vers 0 en l'infini puis qu'il n'y avait pas percolation.

Dans cette démarche, nous utilisons le fait suivant :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \pi_\lambda(\beta) = 0. \quad (4.9)$$

La propriété (4.9), immédiate dans le cas booléen, ne l'est plus dans le cas poissonnien dirigé par une mesure infinie. (Voir par exemple le cas du modèle multi-échelle).

Pour pallier cette difficulté, nous introduisons une famille d'évènements plus fine. Pour x dans \mathbb{R}^d , $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$ nous posons :

$$G(x, \alpha, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} \text{On peut relier } B(x, \beta) \text{ et le complémentaire de } B(x, 2\beta) \\ \text{avec des boules de } \Sigma \text{ de rayons compris entre } \alpha \text{ et } \beta \end{array} \right\}.$$

Lorsque $\alpha = 0$ nous retrouvons les évènements utilisés précédemment. Pour tout $\alpha > 0$, la fonction $\pi_\lambda^\alpha = P(G(0, \alpha, \cdot))$ vérifie une inégalité semblable à (4.4). Par ailleurs, $\pi_\lambda^\alpha(\beta)$ est nulle pour $\beta < \alpha$. Nous récupérons ainsi la propriété (4.9) pour π_λ^α . Grâce à la première hypothèse du théorème, nous pouvons alors montrer que π_λ^α converge vers 0 en l'infini pour λ suffisamment petit. Cette convergence est de plus uniforme en α . Comme π_λ^α converge simplement vers π_λ quand α tend vers 0, cela nous donne la convergence vers 0 en l'infini de π_λ . Cela permet de conclure à la non percolation grâce à la deuxième hypothèse du théorème.

¹¹. C'est une combinaison du théorème 1.2 de [Gou09] et du théorème 2.9 de [Gou09] appliqué par exemple à $\rho = 10$.

Quelques idées de la preuve du théorème 8 par Menshikov, Popov et Vachkovskaia.

Nous décrivons rapidement dans ce paragraphe les idées de la preuve du théorème 8 par Menshikov, Popov et Vachkovskaia. Ces idées sont utilisées dans leur articles [108] et [109] via une discrétisation de l'espace ; nous les décrivons d'une manière légèrement plus géométrique. Pour simplifier, nous considérons simplement deux échelles : $\rho^{-1}\Sigma_1$ et Σ_0 . Pour simplifier encore, nous supposons également que $R = 1$. C'est le cadre de [108].

Supposons que le facteur de changement d'échelle, ρ , est suffisamment grand. Supposons que C est une composante connexe de $\rho^{-1}\Sigma_1 \cup \Sigma_0$ dont le diamètre est plus grand qu'une petite constante $\alpha > 0$, Alors, C est contenue dans la réunion des ensembles suivants :

1. les composantes connexes de $\rho^{-1}\Sigma_1$ dont le diamètre est au moins α ;
2. les boules de Σ_0 de rayons augmentés d'un facteur $1 + \alpha$ (mêmes centres mais rayons $1 + \alpha$ au lieu de 1).

Ensuite, ils montrent que la réunion de ces ensembles est stochastiquement dominée par un modèle booléen similaire à Σ_0 mais dont les rayons sont $1 + \alpha$ et dont la densité est $\lambda(1 + \alpha')$ pour un $\alpha' > 0$ convenablement choisi. Cette partie de preuve utilise $\lambda < \widetilde{\lambda}^c$. Pour des rayons généraux, l'argument est légèrement différent et nécessite (4.6). Ainsi, en un certain sens, on peut contrôler la percolation dans la réunion de deux modèles par la percolation dans un modèle. En choisissant soigneusement les constantes α et α' et en itérant l'argument on peut – pour des ρ suffisamment grands – contrôler la percolation dans le modèle multi-échelle par la percolation dans un modèle booléen sous-critique. Cela donne le résultat.

Quelques idées de la preuve du théorème 9. Les points 1.(a) et 2 sont des conséquences du théorème 10. Nous donnons maintenant les idées de la preuve du point 1.(a).

Supposons $\lambda < \widehat{\lambda}^c(R)$. Désignons par $\Sigma(+\eta)$ le modèle booléen obtenu à partir de Σ en augmentant de η le rayon de chaque boule. Considérons un petit $\varepsilon_1 > 0$. Fixons ensuite $\eta > 0$ petit et a grand tel que :

$$P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma(+\eta)} S(a)) \leq \varepsilon_1/2. \quad (4.10)$$

C'est possible car $\lambda < \widehat{\lambda}^c(R)$.

Pour tout $a \leq b$, posons

$$\Sigma_{a..b}^\rho = \bigcup_{a \leq n \leq b} \rho^{-n} \Sigma_n.$$

Si l'évènement

$$\{S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0..n}^\rho} S(a)\}$$

est réalisé et si l'évènement

$$\{S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_0(+\eta)} S(a)\}$$

n'est pas réalisé alors $B(a) \cap \Sigma_{1..n}^\rho$ possède une composante connexe de diamètre au moins η . Nous utilisons cette observation à travers la conséquence grossière suivante :

$$P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0..n}^\rho} S(a)) \leq P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma(+\eta)} S(a)) + Ca^d \eta^{-d} P(S(\eta/4) \leftrightarrow_{\Sigma_{1..n}^\rho} S(\eta/2)).$$

Par (4.10) et par changement d'échelle nous obtenons :

$$P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0..n}^\rho} S(a)) \leq \varepsilon_1/2 + Ca^d \eta^{-d} P(S(\rho\eta/4) \leftrightarrow_{\Sigma_{0..n-1}^\rho} S(\rho\eta/2)). \quad (4.11)$$

Mais pour tout ε_2 , tout ε_1 suffisamment petit et tout a suffisamment grand il existe τ tel que :

$$P(S(\tau a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0..n-1}^\rho} S(\tau a)) \leq \varepsilon_2 \text{ dès que } P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0..n-1}^\rho} S(a)) \leq \varepsilon_1. \quad (4.12)$$

Ce résultat repose sur des inégalités semblables à (4.3). Nous utilisons ici l'hypothèse d'intégrabilité sur la loi de R . Notons que τ ne dépend ni de n ni de ρ , dès que $\rho \geq \rho_0$ où $\rho_0 > 1$ est fixé.

Nous choisissons maintenant ε_2 tel que :

$$Ca^d \eta^{-d} \varepsilon_2 = \varepsilon_1/2.$$

Nous posons alors $\rho = 2\tau a/\eta$. Ainsi, (4.11) et (4.12) se récrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0\dots n}^\rho} S(a)) &\leq \varepsilon_1/2 + Ca^d \eta^{-d} P(S(\tau a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0\dots n-1}^\rho} S(\tau a)) \\ Ca^d \eta^{-d} P(S(\tau a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0\dots n-1}^\rho} S(\tau a)) &\leq \varepsilon_1/2 \text{ dès que } P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0\dots n-1}^\rho} S(a)) \leq \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Comme de plus l'hypothèse (4.10) entraîne $P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma_{0\dots 0}^\rho} S(a)) \leq \varepsilon_1$ nous obtenons, par récurrence puis en faisant tendre n vers l'infini :

$$P(S(a/2) \leftrightarrow_{\Sigma^\rho} S(a)) \leq \varepsilon_1.$$

La convergence vers 0 se déduit alors du résultat précédent pour un ε_1 suffisamment petit en utilisant une inégalité semblable à (4.3).

4.1.4 Modèles non poissonniens

Cadre. Soit ξ un processus ponctuel sur $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$. Nous supposons que la loi de ξ est invariante sous l'action des translations de \mathbb{R}^d . Nous supposons également que la mesure d'intensité de ξ est localement finie. La mesure d'intensité de ξ s'écrit alors comme le produit de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d par une mesure localement finie ν sur $(0, +\infty)$.

Nous associons à ξ l'ensemble aléatoire suivant :

$$\Sigma = \bigcup_{(c,r) \in \xi} B(c,r).$$

Si ξ est un processus de Poisson, le théorème 10 donne une condition assurant que les composantes connexes de Σ sont bornées presque sûrement. Dans la preuve de ce résultat, le caractère poissonnien du processus n'intervient que dans l'obtention de l'égalité suivante :

$$P(G(\beta k, \beta) \cap G(\beta l, \beta)) = P(G(\beta k, \beta))P(G(\beta l, \beta)).$$

Nous renvoyons au paragraphe de la section 4.1.2(b) dédié à la preuve du théorème 6. En réalité, la suite de la preuve fonctionne de la même manière si l'égalité précédente est remplacée par la majoration suivante :

$$P(G(\beta k, \beta) \cap G(\beta l, \beta)) \leq P(G(\beta k, \beta))P(G(\beta l, \beta)) + o(\beta) \quad (4.13)$$

où $o(\beta)$ tend vers 0 lorsque β tend vers l'infini. Cela permet de donner des résultats de non percolation dans le cadre donné au début de cette section. Notons que l'évènement $G(\beta k, \beta)$ ne dépend que de

$$\xi \cap B(\beta k, 3\beta) \times (0, \beta) \quad (4.14)$$

et que, similairement, l'évènement $G(\beta l, \beta)$ ne dépend que de

$$\xi \cap B(\beta l, 3\beta) \times (0, \beta). \quad (4.15)$$

L'inégalité (4.13) réclame donc quelque chose de plus faible qu'une décorrélation asymptotique entre les processus ponctuels bornés décrits en (4.14) et en (4.15).

Il est également possible de donner des conditions assurant l'intégrabilité du diamètre des composantes connexes.

Nous renvoyons au théorème 1.3 ainsi qu'aux théorèmes 2.7, 2.8 et 2.9 de [Gou09] pour des énoncés précis.

Mariage de la mesure de Poisson et de la mesure de Lebesgue. Nous donnons dans ce paragraphe un exemple d'application. Le modèle suivant a été introduit par Hoffman, Holroyd et Peres dans [80]. Soit χ un sous-ensemble localement fini de \mathbb{R}^d . Nous appelons les éléments de \mathbb{R}^d des sites et les éléments de χ des centres. Soit $\alpha \in (0, \infty)$ un paramètre appelé l'appétit. Une allocation de \mathbb{R}^d à χ d'appétit α est une application mesurable

$$\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \chi \cup \{\infty, \Delta\}$$

telle que $|\psi^{-1}(\Delta)| = 0$ et $|\psi^{-1}(a)| \leq \alpha$ pour tout $a \in \chi$. Nous appelons $\psi^{-1}(a)$ le territoire du centre a . Un centre $a \in \chi$ est rassasié si $|\psi^{-1}(a)| = \alpha$. Un site $x \in \mathbb{R}^d$ est réclamé si $\psi(x) \in \chi$ et non réclamé si $\psi(x) = \infty$. L'allocation est non définie en x si $\psi(x) = \Delta$.

La définition suivante, donnée dans [80], est une adaptation de celle introduite par Gale et Shapley [63]. Soit a un centre et x un site tels que $\psi(x) \notin \{a, \Delta\}$. Nous disons que x désire a si

$$\|x - a\| < \|x - \psi(x)\| \text{ ou } x \text{ n'est pas réclamé.}$$

Nous disons que a convoite x si

$$\|x - a\| < \|x' - a\| \text{ pour un } x' \in \psi^{-1}(a), \text{ ou si } a \text{ n'est pas rassasié.}$$

Nous disons qu'une paire site-centre (x, a) est instable pour l'allocation ψ si x désire a et que a convoite x . Une allocation est stable s'il n'existe pas de paire instable.

Nous supposons maintenant que χ est un processus de Poisson ponctuel sur \mathbb{R}^d de mesure d'intensité la mesure de Lebesgue. Dans [80], les auteurs ont prouvé entre autres choses qu'il existait presque sûrement une allocation stable presque partout unique ψ de \mathbb{R}^d sur χ . Ils ont également établi le comportement suivant :

1. Si $\alpha < 1$ alors presque sûrement tous les centres sont rassasiés mais le volume des sites non réclamés est infini.
2. Si $\alpha = 1$ alors presque sûrement tous les centres sont rassasiés et le volume des sites non réclamés est nul.
3. Si $\alpha > 1$ alors presque sûrement il existe des centres non rassasiés et le volume des sites non réclamés est nul.

Appelons \mathcal{C} la fermeture de la réunion de tous les territoires $\psi^{-1}(a), a \in \chi$. Dans [62], Freire, Popov et Vachkovskaia ont prouvé, entre autres choses, que pour α suffisamment petit, les composantes connexes de \mathcal{C} sont presque sûrement bornées.

Comme application de nos résultats dans [Gou09], nous avons établi le renforcement suivant, dans lequel D désigne le diamètre de la composante connexe de \mathcal{C} contenant l'origine.

Théorème 12 *Si α est suffisamment petit alors, pour tout $s > 0$, $E(D^s)$ est finie.*

Pour prouver ce résultat nous commençons par dominer stochastiquement \mathcal{D} par un processus plus simple. La construction repose sur une idée qui est apparue dans [79] (voir la preuve de la proposition 11(ii)) et qui était utilisée dans le même but que le nôtre dans [62] (voir le lemme 2.1).

La preuve que nous donnons du théorème 12 – qui est une adaptation de la preuve de non percolation que nous avons donnée dans [Gou08] dans le cadre booléen – est au final assez proche de la preuve de la non-percolation donnée par Freire, Popov et Vachkovskaia dans [62].

Signalons pour conclure que le théorème 12 a été généralisé par Díaz [56] dans un cadre où les appétits des différents centres sont aléatoires. Sa preuve repose également sur les résultats de non percolation établis dans [Gou09].

4.1.5 Modèle booléen : seuil de percolation, loi des rayons et dimension

(a) La densité recouverte critique en fonction de la mesure ν sur les rayons.

Nous nous plaçons sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Nous étudions la famille de modèles booléens associés à une mesure ν de masse non nulle (voir la section 4.1.3.(b)). Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\int r^d \nu(dr) < \infty. \quad (4.16)$$

Le théorème 6 dans le cas où ν est de masse finie et le théorème 10 dans le cas général assurent que le seuil critique de percolation $\lambda^c(\nu)$ est un réel strictement positif. Ces théorèmes assurent également l'existence d'une constante C_d , ne dépendant que de la dimension d , telle que :

$$\lambda^c(\nu) \geq C_d \left(\int r^d \nu(dr) \right)^{-1}. \quad (4.17)$$

Nous cherchons à étudier le comportement du seuil critique en fonction de la mesure ν . Pour cela, il est commode de regarder le seuil critique à travers la densité recouverte critique $c^c(\nu)$ définie par :

$$c^c(\nu) = P(0 \in \Sigma(\lambda^c(\nu)\nu)) = 1 - \exp\left(-\lambda^c(\nu) \int v_d r^d \nu(dr)\right)$$

où v_d désigne le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d . Cette définition a déjà été donnée en (4.2) dans le cas où ν est la loi d'une v.a. qui était notée R . La densité recouverte critique c^c reste inchangée lorsque ν est remplacée par son image par une homothétie de rapport $a > 0$, autrement dit lorsque les rayons sont multipliés par a . Ce fait a déjà été signalé dans le cas où ν est une mesure de probabilité. Par ailleurs, remplacer ν par $a\nu$ pour une constante $a > 0$ ne modifie pas non plus la densité recouverte critique .

Une quantité également agréable à manipuler est le seuil normalisé $\bar{\lambda}^c(\nu)$ défini par :

$$\bar{\lambda}^c(\nu) = \lambda^c(\nu) \int v_d (2r)^d \nu(dr).$$

On a alors :

$$c^c(\nu) = 1 - \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}^c(\nu)}{2^d}\right).$$

L'intérêt du facteur 2^d apparaîtra dans les énoncés des théorèmes ci-dessous.

Il a été conjecturé par Kertész et Vicsek [87] que la densité recouverte critique c^c – ou de manière équivalente le seuil normalisé $\bar{\lambda}^c$ – était indépendant de ν . Phani et Dhar [52] ont donné une heuristique suggérant que la conjecture était fautive. Cette heuristique a été rendue rigoureuse par les études de modèles multi-échelles par Meester, Roy et Sarkar [105] puis par Menshikov, Popov et Vachkovskaia [108]. Nous renvoyons à la section 4.1.3.(a) de ce mémoire. En particulier, si $\nu(n, \rho) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{id} \delta_{\rho^{-i}}$, alors on a :

$$\bar{\lambda}^c(\nu(n, \rho)) \rightarrow n \bar{\lambda}^c(\delta_1).$$

C'est une conséquence du théorème 1.1 de [108] – le théorème 8 de ce mémoire appliqué au cas $R = 1$ – qui traite du cas plus difficile où n est infini. Cela montre que $\bar{\lambda}^c(\nu)$ peut-être arbitrairement grand. Par ailleurs, par (4.17), nous savons que $\bar{\lambda}^c(\nu)$ est minoré par $2^d v_d C_d$.

Pour résumer $\bar{\lambda}^c(\cdot)$ n'est pas majoré mais est minoré par une constante strictement positive. Autrement dit, la densité recouverte critique $c^c(\cdot) \in (0, 1)$ peut être arbitrairement proche de

1 mais est minorée par une constante strictement positive. La motivation initiale des travaux ayant mené à [GM11] est la question suivante :

$$\text{La densité recouverte critique } c^c(\nu) \text{ est-elle minimisée lorsque } \nu = \delta_1 ? \quad (4.18)$$

Dans la littérature physique, il est conjecturé que la réponse est positive, au moins en dimensions $d = 2$ et $d = 3$. Cette conjecture est étayée par des arguments numériques. À notre connaissance, les estimations les plus précises sont données dans un article de Quintanilla et Ziff [125] en dimension $d = 2$ et dans un article de Consiglio, Baker, Paul et Stanley [40] en dimension $d = 3$. La figure 4.2 représente la densité recouverte critique $c_2^c((1-\alpha)\delta_1 + \alpha\rho^{-2}\delta_\rho)$ en fonction de α pour différentes valeurs de ρ . Notons que, pour $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, $c_2^c((1-\alpha)\delta_1 + \alpha\rho^{-2}\delta_\rho) = c_2^c(\delta_1)$: c'est la densité recouverte critique dans le cas de rayons constants. Les résultats pour ρ finis proviennent de [125]. La limite pour ρ tendant vers l'infini provient des résultats sur les modèles multi-échelles. Nous donnons plus de détails dans [Gou10].

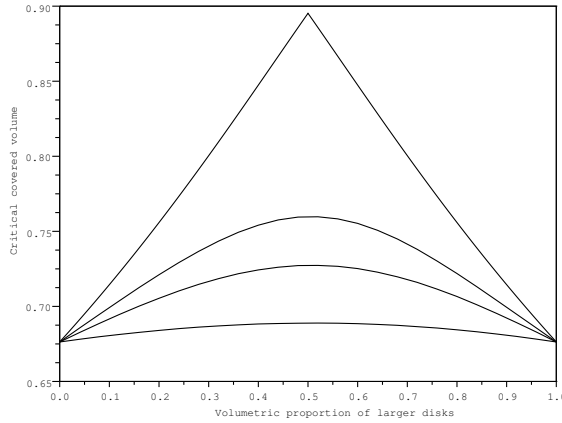


FIGURE 4.2 – La densité recouverte critique $c_2^c((1-\alpha)\delta_1 + \alpha\rho^{-2}\delta_\rho)$ en fonction de $\alpha \in [0, 1]$ pour différentes valeurs de ρ . De bas en haut : $\rho = 2, \rho = 5, \rho = 10$ et la limite lorsque $\rho \rightarrow \infty$.

Cette conjecture s'appuie également sur des arguments heuristiques en toute dimension (voir par exemple Dhar [51] ; voir également Balram et Dhar [15]). Dans l'article [105] cité ci-dessus, les auteurs notent que la preuve de leur résultat sur le modèle multi-échelle suggère que la conjecture pourrait être vraie en toute dimension.

Dans [GM11], nous avons montré que la conjecture était fautive en grande dimension. Pour cela, nous avons étudié le comportement asymptotique de c^c le long de suites de mesures lorsque la dimension d tend vers l'infini.

(b) Seuil critique en grande dimension : rayon constant.

Nous considérons dorénavant les seuils de percolation en fonction de la dimension d . Pour expliciter cette dimension nous écrivons $\bar{\lambda}_d^c$ et c_d^c . Nous supposons dans cette section que la mesure ν est une masse de Dirac en 1, autrement dit que les rayons sont constants et égaux à 1. Les résultats présentés dans cette section sont dus à Penrose [121].

Théorème 13 (Penrose) $\lim_{d \rightarrow \infty} \bar{\lambda}_d^c(\delta_1) = 1$.

Ce théorème 13 est l'analogue pour le modèle booléen d'un résultat de Kesten pour la percolation indépendante sur les arêtes de \mathbb{Z}^d [89] : $p_c(\mathbb{Z}^d) \sim (2d)^{-1}$. L'idée de ce résultat est

que, en grande dimension, la plupart des chemins sont auto-évitants et que, du point de vue de la percolation, \mathbb{Z}^d ressemble à un arbre de degré $2d$. L'idée du théorème de Penrose est similaire.

Nous donnons dans la suite de cette section quelques idées de la preuve. L'inégalité $\bar{\lambda}_d^c(\delta_1) > 1$ est vraie pour tout $d \geq 2$. La preuve est simple. Elle repose sur l'étude de la généalogie suivante (que nous avons déjà décrite dans la section (b)). La boule déterministe $B(0, 1)$ est la boule de génération 0. Les boules aléatoires de $\Sigma(\lambda\delta_1)$ qui touchent $B(0, 1)$ sont les boules de génération 1. Les boules aléatoires qui touchent une boule de génération 1 sans être l'une de ces boules sont les boules de génération 2 et ainsi de suite. Notons N_d le nombre de boules descendant de $B(0, 1)$ dans cette généalogie. Il n'y a pas percolation si et seulement si N_d est presque sûrement fini.

Notons m la distribution de Poisson de moyenne $\lambda v_d 2^d$: c'est la loi du nombre de boules de $\Sigma(\lambda\delta_1)$ qui touchent une boule fixée de rayon 1. Par conséquent, s'il n'y avait pas d'interférence entre les enfants des différentes boules, N_d serait égal en loi à Z , la population totale dans un arbre de Galton-Watson dans lequel le nombre d'enfants d'un individu est distribué suivant la loi m . Du fait des interférences liées à la géométrie, ce n'est pas le cas. Il est par contre possible de montrer que N_d est stochastiquement dominé par Z . Par conséquent, si $\lambda v_d 2^d \leq 1$, alors Z est fini presque sûrement, donc N_d est fini presque sûrement et donc il n'y a pas percolation. Cela entraîne :

$$\bar{\lambda}_d^c(\delta_1) = v_d 2^d \lambda_d^c(\delta_1) > 1.$$

La difficulté de la preuve du théorème 13 réside dans la majoration de $\bar{\lambda}_d^c(\delta_1)$. L'idée est que, si d est grand, les interférences sont petites et par conséquent N_d est proche en loi de Z . Il y a donc percolation pour d grand dès que Z est légèrement surcritique, c'est-à-dire dès que $\bar{\lambda}_d^c(\delta_1) = v_d 2^d \lambda_d^c(\delta_1)$ est légèrement supérieur à 1.

La philosophie du théorème 13 peut se résumer ainsi : au premier ordre, le comportement asymptotique du seuil de percolation est donné par le seuil du processus de Galton-Watson associé.

(c) Seuil critique en grande dimension : rayons aléatoires.

Soit μ une mesure finie et de masse non nulle sur $(0, +\infty)$. Pour tout $d \geq 2$ nous posons :

$$\mu_d(dr) = r^{-d} \mu(dr).$$

Notons que, pour tout d , l'hypothèse (4.16) est automatiquement vérifiée par μ_d . Nous avons étudié dans [GM11] le comportement de $\bar{\lambda}_d^c(\mu_d)$ lorsque d tend vers l'infini. Nous motivons la définition de μ_d par les deux propriétés voisines suivantes :

1. Considérons le modèle booléen $\Sigma(\lambda\mu_d)$ sur \mathbb{R}^d dirigé par la mesure $\lambda\mu_d$ où $\lambda > 0$. Pour tout $0 < s < t < \infty$, le nombre de boules de $\Sigma(\lambda\mu_d)$ contenant un point fixé et dont le rayon est compris entre s et t est une variable aléatoire de Poisson de moyenne :

$$\int_{[s,t]} v_d r^d \lambda \mu_d(dr) = v_d \lambda \mu([s, t]).$$

De manière un peu vague, cela signifie que, au contraire de ce qu'il se passe pour le modèle booléen dirigé par $\lambda\mu$, l'importance relative des différents rayons ne dépend pas de la dimension d .

2. Voici une propriété reliée. Considérons par exemple le cas $\mu = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$. Une manière de construire le modèle booléen $\Sigma(\lambda\mu_d)$ sur \mathbb{R}^d est de poser :

$$\Sigma(\lambda\mu_d) = a\Sigma(\lambda\alpha\delta_1) + b\Sigma(\lambda\beta\delta_1)$$

où $\Sigma(\lambda\alpha\delta_1)$ et $\Sigma(\lambda\beta\delta_1)$ sont deux modèles booléens indépendants respectivement dirigés par les mesures $\lambda\alpha\delta_1$ et $\lambda\beta\delta_1$.

Nous prouvons dans [GM11] le résultat suivant :

Théorème 14 (G.-Marchand) *Soit μ une mesure finie et de masse non nulle sur $(0, +\infty)$. Nous supposons que μ n'est pas concentrée sur un singleton. Alors :*

$$\limsup_{d \rightarrow +\infty} \frac{1}{d} \ln \left(\bar{\lambda}_d^c(\mu_d) \right) < 0.$$

Nous poursuivons notre travail sur ce problème. Plusieurs questions viennent immédiatement à l'esprit : la quantité étudiée converge-t-elle ? à quelle vitesse ? vers quelle limite ? peut-on obtenir un résultat asymptotique non logarithmique ? quel est le comportement pour d'autres suites de mesures ? etc.

Rappelons que, d'après le théorème de Penrose 13 et les propriétés d'invariance de $\bar{\lambda}_d^c$, nous avons, pour tout $\alpha, a > 0$,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \bar{\lambda}_d^c((\alpha \delta_a)_d) = \lim_{d \rightarrow \infty} \bar{\lambda}_d^c(\delta_a) = \lim_{d \rightarrow \infty} \bar{\lambda}_d^c(\delta_1) = 1.$$

Comme conséquence immédiate du théorème 14 et du théorème de Penrose 13 – ou de la convergence beaucoup plus élémentaire $\ln(\bar{\lambda}_d^c(\delta_1)) \rightarrow 0$ – nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 15 *Soit μ une mesure finie et de masse non nulle sur $(0, +\infty)$. Nous supposons que μ n'est pas concentrée sur un singleton. Alors, pour tout d suffisamment grand, nous avons :*

$$\bar{\lambda}_d^c(\mu_d) < \bar{\lambda}_d^c(\delta_1), \text{ ou, de manière équivalente, } c_d^c(\mu_d) < c_d^c(\delta_1).$$

Il serait souhaitable de quantifier ce résultat. En particulier, il serait souhaitable d'estimer la dimension d à partir de laquelle il existe une mesure ν satisfaisant l'inégalité $c_d^c(\nu) < c_d^c(\delta_1)$.

Le théorème 14 découle d'un résultat plus précis obtenu dans le cas où les rayons ne prennent que deux valeurs.

(d) Seuil critique en grande dimension : rayons aléatoires ne prenant que deux valeurs.

Pour énoncer le résultat, nous avons besoin de notations supplémentaires. Le sens des objets introduits est explicité dans la section (e). Fixons $\rho > 1$ et $k \geq 1$. Posons $r_1 = r_{k+1} = 1 + \rho$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, k\}$, $r_i = 2$. Pour tout $(a_i)_{2 \leq i \leq k+1} \in [0, 1)^k$ nous définissons une suite strictement croissante de distances $(d_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ en posant $d_1 = 1 + \rho$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, k+1\}$:

$$d_i^2 = d_{i-1}^2 + 2r_i a_i d_{i-1} + r_i^2.$$

Nous posons $\mathcal{D}(a_2, \dots, a_{k+1}) = d_{k+1}$. Nous posons, pour tout $k \geq 1$,

$$\kappa_\rho^c(k) = \inf_{0 \leq a_2, \dots, a_{k+1} < 1} \max \left(\left(\frac{4\rho}{(1+\rho)^2 \sqrt{\prod_{2 \leq i \leq k+1} (1-a_i^2)}} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \frac{2\rho}{\mathcal{D}(a_2, \dots, a_{k+1})} \right). \quad (4.19)$$

Enfin, nous posons :

$$\kappa_\rho^c = \inf_{k \geq 1} \kappa_\rho^c(k). \quad (4.20)$$

Nous explicitons le sens des formules définissant les d_i , les $\kappa_\rho^c(k)$ et κ_ρ^c dans la section (e).

Nous démontrons dans [GM11] le résultat suivant :

Théorème 16 (G.-Marchand) Soient $b > a > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Posons $\mu = \alpha\delta_a + \beta\delta_b$ et $\rho = b/a > 1$. Alors

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{1}{d} \ln \left(\bar{\lambda}_d^c(\mu_d) \right) = \ln \left(\kappa_\rho^c \right) < 0. \quad (4.21)$$

Notons que dans le cadre étudié par Penrose – $\rho = 1$ – cet équivalent logarithmique s’obtient relativement facilement.

Il est vraisemblable qu’un résultat analogue au théorème 16 existe pour des mesures plus générales. Nous n’avons pas encore étudié sérieusement cette question.

La quantité κ_ρ^c appartient à $(0, 1)$. Par ailleurs, si $1 < \rho \leq 2$ alors :

$$\kappa_\rho^c = \frac{2\sqrt{\rho}}{1 + \rho}$$

tandis que si $\rho > 2$ alors :

$$\kappa_\rho^c > \frac{2\sqrt{\rho}}{1 + \rho}.$$

La figure 4.3 représente le graphe de $\kappa_\rho^c(k)$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$. La fonction $\kappa_\rho^c(1)$ est connue explicitement. Nous avons estimé numériquement les autres $\kappa_\rho^c(k)$. Nous n’avons pour l’instant pas étudié davantage ces fonctions. Par exemple, nous ne savons pas si, pour tout entier $k \geq 1$, il existe un $\rho > 1$ tel que $\kappa_\rho^c = \kappa_\rho^c(k)$. Nous savons que c’est vrai pour $k = 1$. La figure et quelques résultats supplémentaires suggèrent que c’est également au moins le cas pour $k = 2$ et $k = 3$.

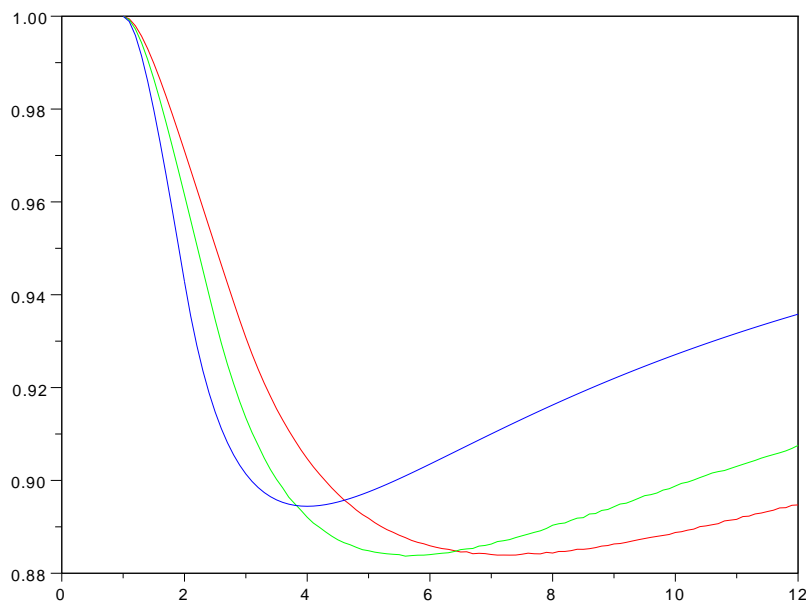


FIGURE 4.3 – Graphe de $\kappa_\rho^c(k)$ en fonction de ρ , $k \in \{1, 2, 3\}$, de gauche à droite. Par exemple : $\kappa_2^c(1) \leq \kappa_2^c(2) \leq \kappa_2^c(3)$.

Rappelons que, dans le cas des rayons déterministes, le premier ordre du seuil critique est donné asymptotiquement par le seuil du processus de Galton-Watson associé. Dans le cas de

rayons prenant deux valeurs, le processus de Galton-Watson associé est un processus à deux types, un pour chaque rayon. Le seuil donné par ce processus de Galton-Watson est :

$$\frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}.$$

Nous constatons ainsi que le comportement du seuil du modèle booléen – le long de la suite μ_d – n'est donné par le processus de Galton-Watson que pour ρ proche de 1. Pour d'autres valeurs de ρ , même sur une échelle logarithmique, les effets de la géométrie ne deviennent pas négligeables en grande dimension. Nous renvoyons à la discussion de la section 2.2 de [GM11].

(e) **Quelques idées de preuve - signification de la définition des d_i , des $\kappa_\rho^c(k)$ et de κ_ρ^c .**

Quelques notations. Fixons $\rho > 1$ et considérons la mesure $\nu = \delta_1 + \delta_\rho$. Fixons $\kappa > 0$. Nous nous intéressons au modèle booléen Σ sur \mathbb{R}^d dirigé par la mesure

$$\frac{\kappa^d}{v_d 2^d} \nu_d.$$

Nous notons χ_1 l'ensemble des centres des boules de rayon 1 et χ_ρ l'ensemble des centres des boules de rayon ρ .

Le nombre moyen de boules de rayon 1 de Σ touchant une boule fixée de rayon 1 est κ^d . Le nombre moyen de boules de rayon ρ de Σ touchant une boule fixée de rayon ρ est également κ^d . Nous étudions des régimes dans lesquels κ est strictement inférieur à 1. Ni les petites boules seules ni les grandes boules seules ne peuvent donc percoler.

Rappelons que le modèle booléen Σ peut être construit comme la réunion de Σ' et de $\rho\Sigma''$ où Σ' et Σ'' sont deux modèles booléens indépendants dirigés par la mesure :

$$\frac{\kappa^d}{v_d 2^d} \delta_1.$$

Percolation et percolation par k -alternance. Nous définissons la percolation par k -alternance comme l'existence d'un chemin infini alternant une boule de rayon ρ , k boules de rayon 1, une boule de rayon ρ et ainsi de suite.

Nous montrons que le κ critique pour la percolation par k -alternance – c'est-à-dire le κ en-dessous duquel il n'y a asymptotiquement pas percolation par k -alternance et au-dessus duquel il y a asymptotiquement percolation par k -alternance – est $\kappa_\rho^c(k)$. À partir de ce résultat – et des estimés qui y mènent – il est alors facile de montrer que le κ critique pour la percolation est $\kappa_\rho^c = \inf_{k \geq 1} \kappa_\rho^c(k)$. Cela établit le théorème 16.

Absence de percolation par k -alternance pour $\kappa < \kappa_\rho^c(k)$. Introduisons :

$$N_k = \# \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} \in \chi_\rho : \text{il existe } x_1, \dots, x_k \in \chi_1 \text{ distincts tels que} \\ \|x_1\| < 1 + \rho, \forall i \in \{1, \dots, k-1\} \|x_{i+1} - x_i\| < 2, \\ \|x_{k+1} - x_k\| < 1 + \rho \end{array} \right\}. \quad (4.22)$$

Nous obtenons une minoration pour $\kappa_\rho^c(k)$ en majorant $E(N_k)$. Une généalogie est naturellement associée à la définition de N_k . Nous commençons avec un ancêtre x_0 en l'origine. Ses enfants sont les points de $\chi_1 \cap B(x_0, 1 + \rho)$: ils constituent la première génération. Si x_1 est un individu de la première génération, ses enfants sont les points de $\chi_1 \cap B(x_1, 2)$. L'ensemble des enfants des individus de la première génération constitue la seconde génération et ainsi de suite. La géométrie

de \mathbb{R}^d induit des dépendances : si par exemple x_1 et x'_1 sont deux individus de la première génération, leurs enfants sont a priori dépendants. Si nous oublions ces contraintes géométriques et ne tenons compte que des contraintes généalogiques, nous obtenons la majoration suivante :

$$E(N_k) \leq \lambda_1 |B(\cdot, 1 + \rho)| \left(\prod_{i=2}^k \lambda_1 |B(\cdot, 2)| \right) \lambda_\rho |B(\cdot, 1 + \rho)|.$$

Mais les points de la dernière génération appartiennent à $\chi_\rho \cap B(0, 2\rho + 2k)$. Par conséquent, si nous oublions la généalogie et ne tenons compte que de cette dernière contrainte géométrique, nous obtenons la majoration suivante :

$$E(N_k) \leq \lambda_\rho |B(0, 2\rho + 2k)|.$$

En explicitant les deux majorations précédentes et en les combinant nous obtenons :

$$E(N_k) \leq \max \left(\frac{\kappa^{k+1}(1 + \rho)^2}{4\rho}, \frac{\kappa(\rho + k)}{\rho} \right)^d.$$

Dans cette majoration, le premier argument du maximum provient de contraintes généalogiques tandis que le second provient de contraintes géométriques. Pour obtenir le terme géométrique, nous avons considéré le pire cas, celui dans lequel, à chaque génération, chaque enfant est aussi loin que possible de l'origine. C'est un scénario très pessimiste. Pour obtenir une meilleure majoration, nous procédons de la manière suivante. Fixons $a_2, \dots, a_{k+1} \in [0, 1)$. Nous leur associons les distances d_1, \dots, d_{k+1} et $\mathcal{D}(a_2, \dots, a_{k+1})$ comme précédemment. Notons $\tilde{N}_k(a_2, \dots, a_{k+1})$ le nombre de points $x_{k+1} \in \chi_\rho$ pour lesquels il existe un chemin x_1, \dots, x_k satisfaisant les conditions apparaissant dans la définition de N_k ainsi que les conditions suivantes : $\|x_i\| \approx d_i$ pour tout i . La figure 4.4 illustre le lien entre les a_i et les distances d_i . En raisonnant comme précédemment, nous obtenons alors la majoration suivante :

$$E(\tilde{N}_k(a_2, \dots, a_{k+1})) \lesssim \min \left(\kappa^{k+1} \frac{(1 + \rho)^2}{4\rho} \sqrt{\prod_{2 \leq i \leq k+1} (1 - a_i)^2}, \frac{\kappa \mathcal{D}(a_2, \dots, a_{k+1})}{2\rho} \right)^d.$$

Ici encore, le premier argument du maximum provient de contraintes généalogiques tandis que le second terme provient de la géométrie. En optimisant en les a_i , nous obtenons :

$$E(N_k) \lesssim \sup_{a_2, \dots, a_{k+1}} \min \left(\kappa^{k+1} \frac{(1 + \rho)^2}{4\rho} \sqrt{\prod_{2 \leq i \leq k+1} (1 - a_i)^2}, \frac{\kappa \mathcal{D}(a_2, \dots, a_{k+1})}{2\rho} \right)^d.$$

Le seuil $\kappa_\rho^c(k)$ sépare le régime où la majoration précédente tend vers 0 de celui où elle tend vers l'infini. Il est alors simple de déduire de la majoration précédente – par un argument de généalogie – qu'en dessous de $\kappa_\rho^c(k)$, il n'y a pas percolation par k -alternance.

Percolation par k -alternance pour $\kappa > \kappa_\rho^c(k)$.

Si $\kappa > \kappa_\rho^c(k)$ alors il est possible de montrer que $E(N_k)$ ne converge pas vers 0. Pour montrer qu'il y a percolation par k -alternance pour $\kappa > \kappa_\rho^c(k)$, nous montrons en réalité un résultat plus fort. Nous montrons que, pour de tels κ , il existe, avec une probabilité tendant vers 1 lorsque d tend vers l'infini, un chemin satisfaisant les conditions apparaissant dans la définition de N_k – ou, plus précisément, de $\tilde{N}_k(a_2, \dots, a_{k+1})$ pour des a_2, \dots, a_{k+1} optimaux – et satisfaisant également des conditions supplémentaires sur la position des boules. Ce résultat est la principale difficulté

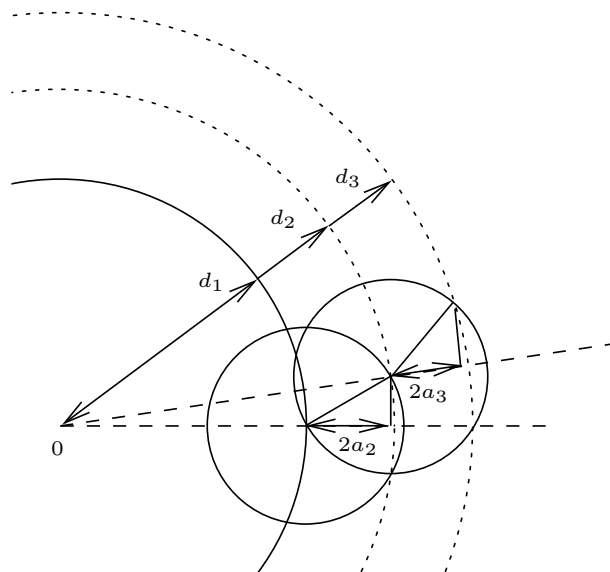


FIGURE 4.4 – Définition des distances d_i . Les cercles en lignes pleines sont de rayons $1 + \rho$ et 2 .

de la preuve de 16. Les conditions supplémentaires imposées sur les chemins entraînent des propriétés d'indépendance entre l'existence de différents chemins de ce type. Il est alors possible d'en déduire l'existence de nombreux chemins de ce type et de concaténer certains d'entre eux pour obtenir une chaîne infinie alternant boules de rayon 1 et de rayon ρ . Techniquement, cette dernière étape est réalisée en comparant notre modèle avec un modèle de percolation orienté surcritique sur \mathbb{Z}^2 . Dans cette comparaison, une arête ouverte sur \mathbb{Z}^2 correspond à l'un des chemins de $k + 2$ boules précédents. Ce dernier argument apparaissait également dans l'article de Penrose [121].

4.2 Percolation de premier passage et compétition

Nous présentons dans cette section les travaux [Gou07] et [GM08]. Le dernier est le résultat d'une collaboration avec Régine Marchand.

4.2.1 Introduction.

Le modèle classique de percolation de premier passage. La percolation de premier passage a été introduite par Hammersley et Welsh en 1965 [74] pour modéliser l'écoulement d'un fluide à travers un milieu aléatoire. Nous commençons par présenter rapidement ce modèle. C'est le cadre de nos travaux [Gou07] et [GM08]. Il n'y a aucun résultat original dans ce paragraphe.

Nous renvoyons à l'article de revue de Deijfen et Häggström [49] pour une présentation plus large des questions qui nous intéressent dans la section 4.2. Nous renvoyons aux articles de revue de Kesten [88] et Howard [81] pour une description plus complète de la percolation de premier passage.

Le modèle le plus classique est défini sur le graphe non orienté \mathbb{Z}^d usuel¹², $d \geq 2$. À chaque arête (x, y) est associé un temps $\tau(x, y)$ aléatoire et positif. Ce temps s'interprète comme le temps nécessaire à un fluide pour traverser l'arête. Les temps associés aux différentes arêtes sont indépendants et de même loi. Un chemin d'un sommet x à un sommet y est une suite finie de sommets $(x = x_0, \dots, x_n = y)$ dans laquelle deux sommets successifs sont toujours adjacents. Le temps associé à un chemin $x = (x_0, \dots, x_n)$ est la somme des temps des arêtes qui le composent :

$$\tau(c) = \sum_{i=0}^{n-1} \tau(x_i, x_{i+1}).$$

À deux sommets x et y non nécessairement adjacents est associé un temps $T(x, y)$:

$$T(x, y) = \inf_c \tau(c)$$

où l'infimum porte sur tous les chemins de x à y . Le temps $T(x, y)$ s'interprète comme le temps nécessaire à un fluide pour aller de x en y . Ce temps vérifie l'importante propriété de sous-additivité suivante. Pour tous sommets x, y, z , on a :

$$T(x, z) \leq T(x, y) + T(y, z).$$

Si tous les temps associés aux arêtes sont strictement positifs, T définit en fait une distance aléatoire sur le graphe. C'est une distance géodésique.

Notons e_1 le premier vecteur de la base canonique. Soient τ_1, \dots, τ_{2d} des copies indépendantes de $\tau(0, e_1)$. Posons :

$$Y = \min(\tau_1, \dots, \tau_{2d}).$$

Si Y est intégrable, alors $T(0, e_1)$ est également intégrable. Le théorème ergodique sous-additif de Kingman permet alors d'exploiter la sous-additivité de T et d'obtenir la convergence suivante :

$$\frac{T(0, ne_1)}{n} \rightarrow \Theta \text{ presque sûrement et } L^1 \quad (4.23)$$

où $\Theta \in [0, +\infty)$ est une constante appelée la constante de temps. Cette constante est non nulle si et seulement si :

$$P(\tau(0, e_1) = 0) < p_c(d) \quad (4.24)$$

où $p_c(d)$ désigne le seuil pour la percolation indépendante d'arête sur \mathbb{Z}^d . C'est un résultat de Kesten¹³ [88]. Nous supposons l'hypothèse (4.24) satisfaite dans la suite.

Pour tout $t > 0$, posons :

$$S_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : T(0, x) \leq t\}.$$

Dans notre modélisation, c'est l'ensemble des sites que le fluide peut atteindre avant l'instant t en partant de x . Mathématiquement c'est la boule centrée en 0 et de rayon t pour la semi-distance T . Des convergences similaires à (4.23) sont également vérifiées lorsque l'on remplace e_1 par un autre vecteur. Sous une hypothèse convenable d'intégrabilité, la convergence le long

12. Deux sommets sont adjacents s'ils sont à distance euclidienne 1 l'un de l'autre.

13. Dans le résultat initial de Kesten, le seuil de percolation est celui associé à l'espérance de la taille de la composante connexe contenant l'origine. Le fait que ce seuil coïncide avec $p_c(d)$ est dû à Menshikov et à Aizenman et Barsky. C'est le théorème 5 de ce mémoire.

de toutes les directions est uniforme. Il est alors possible d'en déduire l'existence d'une norme déterministe N telle que, avec probabilité 1, pour tout ε , pour tout t suffisamment grand :

$$\{x \in \mathbb{R}^d : N(x) \leq 1 - \varepsilon\} \subset \frac{1}{t} \left(S_t + [-1/2, 1/2]^d \right) \subset \{x \in \mathbb{R}^d : N(x) \leq 1 - \varepsilon\}. \quad (4.25)$$

La condition optimale d'intégrabilité est la suivante :

$$E(Y^d) < \infty. \quad (4.26)$$

Ce résultat est dû à Cox et Durrett [42]. Ce type de résultat est appelé un résultat de forme asymptotique.

Une conjecture simple à énoncer. Il semble assez raisonnable de conjecturer que la suite des temps moyens $E(T(0, ne_1))$ est croissante en n , au moins pour des n suffisamment grands. Cette conjecture n'est cependant établie que pour le demi-plan $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ [4]. Nous renvoyons à l'article de revue de Howard pour plus d'informations et pour l'énoncé d'autres conjectures [81].

Modèle de Deijfen, modèle booléen de percolation de premier passage et chemins gourmands continus. Peu de propriétés de la norme limite N intervenant dans le résultat de forme asymptotique (4.25) sont connues. Cette méconnaissance est un obstacle à une étude plus fine de la percolation de premier passage. Cet obstacle a mené à l'introduction et à l'étude de modèles de percolation de premier passage isotropes. Dans ces modèles, la norme limite est, à une constante multiplicative près, la norme euclidienne. Le modèle de Deijfen introduit dans [46] est l'un de ces modèles. Nous le décrivons dans la section 4.2.2. Nous renvoyons à l'article de revue de Howard pour d'autres modèles isotropes [81] ainsi qu'à l'article récent de Lagatta et Wehr [94].

Deijfen a établi un résultat de forme asymptotique dans [46]. Ce résultat est conditionné par la condition $\Theta > 0$, où Θ est la constante de temps de son modèle. Cela amène à chercher un analogue du résultat de Kesten dans ce cadre. Deijfen dans [46] puis Deifén, Häggström et Bagley ont donné des conditions fortes assurant $\Theta > 0$. Dans notre article [GM08] avec Régine Marchand nous avons amélioré ces conditions suffisantes et donné une condition nécessaire. Ces deux conditions ne sont malheureusement pas identiques mais elles sont toutefois très proches. Ce sont les conditions (4.27) et (4.29) ci-dessous.

La preuve de Kesten dans le cadre classique semble ne pas s'adapter ici. Pour prouver notre résultat nous introduisons et étudions un analogue continu des chemins gourmands introduits par Cox, Gandolfi, Griffin et Kesten dans [43]. Notre preuve repose sur une comparaison entre ce modèle et le modèle de Deijfen. La preuve fait également apparaître un modèle intermédiaire, qui est un modèle de percolation de premier passage basé sur le modèle booléen. Ce modèle n'a, à notre connaissance, pas été étudié. Dans ce mémoire nous l'appelons modèle booléen de percolation de premier passage. L'étude de ce modèle de percolation de premier passage fournit une preuve différente d'un résultat proche du théorème 6.

Compétition. Dans [Gou07] nous étudions des modèles de compétition basés sur la percolation de premier passage. Le premier de ces modèles a été introduit par Häggström et Pemantle dans [70]. Il est basé sur le modèle de percolation de premier passage classique sur \mathbb{Z}^d . Un modèle similaire a été introduit ensuite par Deijfen, Häggström et Bagley dans [45]. Il est basé sur le modèle de percolation de premier passage sur \mathbb{R}^d introduit par Deijfen dans [46]. Nos travaux s'appliquent indifféremment à l'un ou l'autre de ces modèles. Pour simplifier, nous nous concentrons dans la suite de cette introduction sur le premier modèle.

Ce modèle décrit la conquête de \mathbb{Z}^d par k colonies. Le territoire conquis par chaque colonie évolue comme un processus de percolation de premier passage avec la contrainte suivante : une fois qu'un site a été conquis par une colonie, il reste éternellement la possession de cette colonie et ne peut donc plus être conquis par une autre colonie. Plus précisément, et en reprenant les notations du paragraphe de cette introduction dédié à la percolation de premier passage sur \mathbb{Z}^d , la dynamique de conquête est la suivante. Si le site x est conquis à l'instant t par la colonie i , alors le site voisin y est conquis à l'instant $t + \tau(x, y)$ par la colonie i , sauf si le site y a déjà été conquis avant l'instant $t + \tau(x, y)$.

Il y a coexistence lorsque les k colonies parviennent toutes à conquérir un territoire non borné. Le nombre de colonies que l'on peut faire coexister est lié au nombre de bouts dans l'arbre constitué de toutes les géodésiques reliant un point de \mathbb{Z}^d à un point fixé. Nous renvoyons par exemple à [70] ou à [78]. Nous montrons dans [Gou07] que le nombre de colonies pouvant coexister se minore par une quantité reliée au nombre de faces de la boule unité pour la norme asymptotique N . Ce résultat étend des résultats antérieurs de Häggström et Pemantle [70], Garet et Marchand [66] et Hoffman [77, 78]. Nous montrons en réalité un résultat plus fort décrivant la forme des territoires ultimement conquis par les différentes colonies. Un résultat de ce type – mais plus précis – a été prouvé antérieurement par Pimentel [122] dans un modèle différent en dimension 2. La preuve de Pimentel est très différente de la nôtre. Notre preuve s'appuie fortement sur des idées provenant de Garet et Marchand [66] et de Hoffman [77, 78].

Signalons que Auffinger et Damron ont donné récemment dans [7] des exemples de lois de temps $\tau(x, y)$ pour lesquels, en dimension 2, le nombre de face de la boule unité pour la norme asymptotique N est infini (la boule n'est pas polygonale). Il est dans ce cas possible de faire coexister un nombre arbitrairement grand de colonies.

4.2.2 Minoration de la constante de temps dans le modèle de Deijfen, modèle booléen de percolation de premier passage et chemins gourmands

Dans cette section nous présentons l'article [GM08]. C'est le résultat d'une collaboration avec Régine Marchand.

(a) Modèle de Deijfen et résultat.

Nous nous intéressons à un modèle de croissance aléatoire sur \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, introduit par Deijfen dans [46]. Ce modèle peut être vu comme décrivant la conquête d'un milieu continu par une colonie. Nous fixons S_0 , le territoire initial de la colonie. C'est un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^d de volume non nul. Nous fixons également une mesure de probabilité μ sur $(0, +\infty)$. Notons S_t le sous-ensemble aléatoire \mathbb{R}^d correspondant au territoire conquis l'instant t . Son volume est noté $|S_t|$. Le modèle de croissance aléatoire $(S_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov évoluant sous la dynamique suivante. Sachant S_t , nous attendons un temps exponentiel de moyenne $|S_t|^{-1}$. Nous ajoutons alors à S_t une boule aléatoire, dont le centre est choisi uniformément dans S_t et dont le rayon est distribué suivant la loi μ . Le modèle de Deijfen est un modèle de percolation de premier passage. Ce point sera peut-être plus évident avec la présentation que nous donnons dans la section (c).

Dans [46], Deijfen a prouvé un résultat de forme asymptotique. Plus précisément, elle a établi la convergence presque sûre de $t^{-1}S_t$ vers une boule euclidienne déterministe (voir (4.28) ci-dessous). Cette convergence a lieu dès que la croissance de S_t est au plus linéaire. Elle a montré que ce comportement avait lieu dès que le support de μ était borné. Ce résultat a été amélioré par Deijfen, Häggström et Bagley dans [45]. Ils ont montré que la croissance était au plus linéaire dès que μ admettait un moment exponentiel. L'idée de leur preuve était de majorer stochastiquement le processus – en oubliant les dépendances liées à la géométrie –

par une marche aléatoire branchante puis d'utiliser un résultat de Biggins sur le maximum de marches aléatoires branchantes sur \mathbb{R} . Dans [GM08], nous améliorons ces résultats en établissant que la condition (4.27) ci-dessous est suffisante. Plus précisément, nous établissons le résultat suivant¹⁴.

Théorème 17 (Deijfen et G.-Marchand)

1. Si

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} r \mu(dr) \right)^{1/d} dx < +\infty, \quad (4.27)$$

alors il existe $\Theta \in (0, +\infty)$ tel que, presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout t suffisamment grand, on a :

$$B_{(1-\varepsilon)/\Theta} \subset \frac{S_t}{t} \subset B_{(1+\varepsilon)/\Theta}. \quad (4.28)$$

De plus, on a¹⁵ :

$$\Theta \geq C_d \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_\rho^{+\infty} r \mu(dr) \right)^{1/d} d\rho \right)^{-d}$$

pour une constante strictement positive C_d ne dépendant que de la dimension d .

2. Si

$$\int_0^{+\infty} r^{d+1} \mu(dr) < +\infty \quad (4.29)$$

n'est pas vérifiée alors, presque sûrement, pour tout $M > 0$, pour tout t suffisamment grand, on a :

$$B_M \subset \frac{S_t}{t}.$$

En dimension $d = 1$, les conditions (4.27) et (4.29) sont identiques. Elles fournissent donc une condition nécessaire et suffisante pour la croissance au plus linéaire. Ce n'est malheureusement plus le cas en dimension $d \geq 2$. Nous ne sommes pas parvenu à résoudre ce problème. Notons cependant que la différence entre (4.27) et (4.29) est raisonnable. En effet, la condition (4.27) est vérifiée¹⁶ dès qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_1^{+\infty} r^{d+1} (\ln r)^{d-1+\varepsilon} \mu(dr) < +\infty.$$

La constante Θ est la constante de temps. Son inverse Θ^{-1} est la vitesse de croissance du modèle. En dimension 1, la vitesse s'explique¹⁷ :

$$\Theta^{-1} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} r^2 \mu(dr).$$

En dimension quelconque, on peut vérifier¹⁸ que multiplier les rayons par une constante A multiplie la vitesse par A^{d+1} .

Pour établir le premier point du théorème 17 – qui est le point principal du théorème – il suffit, compte tenu des résultats de Deijfen, de montrer que la condition (4.27) entraîne la stricte positivité de la constante de temps Θ . La suite de la section 4.2.2 est consacrée à la preuve de ce point ainsi qu'à l'introduction et à l'étude de différents modèles intervenant dans la preuve.

14. C'est le théorème 1.1 de [GM08].

15. Ce résultat est énoncé en remarque après la preuve du lemme 2.6 de [GM08].

16. Voir la section 8 de l'article de Martin [102].

17. Voir l'appendice de [GM08].

18. Voir la deuxième remarque suivant le théorème 1.1 dans [GM08].

(b) Plan de la suite de la section 4.2.2.

Le plan de la section 4.2.2 étant relativement complexe, nous préférons le présenter rapidement.

- Dans la section (c) nous donnons une autre description du modèle de Deijfen. Cette description rend plus évident le fait que ce modèle est un modèle de percolation de premier passage.
- Dans la section (d) nous présentons un modèle de percolation de premier passage basé sur le modèle booléen. Les résultats concernant ce modèle sont présentés dans la section (e).
- Dans la section (f) nous explicitons le lien entre le modèle de Deijfen et le modèle précédent. En particulier, nous montrons comment les résultats sur le modèle booléen de percolation de premier passage permettent d'établir (4.28).
- Dans la section (g) nous présentons le modèle classique des chemins gourmands sur \mathbb{Z}^d . Dans la section (h) nous introduisons un modèle continu analogue et présentons nos résultats sur ce modèle.
- Dans la section (i) nous montrons comme les résultats sur les chemins gourmands continus permettent d'obtenir les résultats sur le modèle booléen de percolation de premier passage donnés dans la section (e).
- Enfin, dans la section (j) nous donnons quelques idées de la preuve des résultats sur les chemins gourmands continus.

Dans notre article [GM08] nous avons évité d'introduire explicitement le modèle booléen de percolation de premier passage. L'introduction de [GM08] est donc plus concise.

(c) Une autre description du modèle de Deijfen.

Dans cette section, nous reprenons la construction du modèle de Deijfen donnée dans [47] par Deijfen et Häggström. Cela permet de voir plus nettement qu'il s'agit d'un modèle de percolation de premier passage. Cela permettra également d'exposer plus simplement la majoration de la vitesse dans ce modèle par la vitesse dans le modèle décrit dans la section (d). Nous suivons la présentation faite dans [Gou07].

Nous nous donnons une mesure de probabilité μ sur $(0, +\infty)$. Soit Ξ , un processus de Poisson ponctuel sur $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty) \times (0, +\infty)$ dont la mesure d'intensité est le produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$ par la mesure μ sur $(0, +\infty)$. L'existence d'un point (c, t, r) – où c, t et r appartiennent respectivement à \mathbb{R}^d , $[0, +\infty)$ et $(0, +\infty)$ – dans Ξ permet de se déplacer de c à tout point de la boule $B(c, r)$ en un temps t . Plus formellement, on considère le graphe dirigé complet de \mathbb{R}^d . A chaque arête, on associe un temps de passage τ de la manière suivante :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ nous posons $\tau(x, x) = 0$.
2. Pour tout $(c, t, r) \in \Xi$ et tout $y \in B(c, r) \setminus \{c\}$, nous posons $\tau(c, y) = t$.
3. Pour toute arête (x, y) pour laquelle aucun temps n'a été assigné, nous posons $\tau(x, y) = +\infty$.

Si a et b sont deux points de \mathbb{R}^d , nous appelons chemin de a à b toute suite finie $\pi = (a = x_0, \dots, x_k = b)$ de points distincts de \mathbb{R}^d . Nous notons $\mathcal{C}(a, b)$ l'ensemble de ces chemins. A chaque chemin $\pi = (x_0, \dots, x_k)$ est associé un temps de passage défini ainsi :

$$\tau(\pi) = \sum_{i=0}^{k-1} \tau(x_i, x_{i+1}).$$

Si A est un sous-ensemble de \mathbb{R}^d et si x est un point de \mathbb{R}^d , le temps $T(A, x)$ nécessaire pour atteindre x en partant de A est défini par :

$$T(A, x) = \inf\{\tau(\pi) : a \in A, \pi \in \mathcal{C}(a, x)\}.$$

Enfin, si l'état initial du processus est par exemple $S_0 = B(0, 1)$, nous définissons S_t , l'ensemble des points atteints à l'instant t , par :

$$S_t = \{x \in \mathbb{R}^d : T(B, x) \leq t\}.$$

C'est le modèle de Deijfen.

En utilisant le théorème ergodique sous-additif de Kingman et en exploitant l'isotropie du modèle, on obtient l'existence d'un réel $\Theta \geq 0$ tel que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{T(B, x)}{\|x\|} = \Theta \text{ presque sûrement.}$$

Ce résultat est contenu dans l'article de Deijfen [46]¹⁹. La croissance est linéaire si Θ , qui est l'inverse d'une vitesse, est strictement positive. Dans ce cas, on peut facilement en déduire le résultat de forme asymptotique (4.28).

(d) Modèle booléen de percolation de premier passage.

Dans cette section, nous introduisons un nouveau modèle que nous appelons le modèle booléen de percolation de premier passage. Il n'a, à notre connaissance, pas été étudié. Il est implicite dans la preuve du théorème 17 donnée dans [GM08]. Les remarques qui suivent sont essentiellement contenues dans l'introduction de [GM08]. Dans la section (f) nous montrerons que la constante de temps dans le modèle de Deijfen se minore par une fonction de la constante de temps dans ce modèle booléen de percolation de premier passage.

Nous considérons un modèle booléen Σ . Nous renvoyons à la section 4.1.1 pour une définition. Le modèle booléen de percolation de premier passage associé est défini de la manière suivante. Pour tout x, y dans \mathbb{R}^d , nous définissons un temps $\hat{\tau}(x, y)$ égal à la mesure 1-dimensionnelle de $[x, y] \setminus \Sigma$. Autrement dit, le déplacement se fait à vitesse 1 en dehors de Σ et à vitesse infinie dans Σ . À chaque chemin $\pi = (x_0, \dots, x_k)$ est associé un temps de passage défini par :

$$\hat{\tau}(\pi) = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\tau}(x_i, x_{i+1}).$$

Si x et y sont deux points de \mathbb{R}^d , le temps $\hat{T}(x, y)$ nécessaire pour atteindre y en partant de x est défini par :

$$\hat{T}(x, y) = \inf\{\hat{\tau}(\pi) : \pi \in \mathcal{C}(x, y)\}.$$

En appliquant le théorème ergodique sous-additif de Kingman et en exploitant l'isotropie, on obtient l'existence d'une constante $\hat{\Theta} \in [0, 1]$ (la constante de temps) telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on ait²⁰ :

$$\frac{\hat{T}(0, nx)}{n\|x\|} \rightarrow \hat{\Theta} \text{ presque sûrement et } L^1 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

19. Dans [46] Deijfen n'utilise pas la construction ci-dessus ; le théorème de Kingman ne s'applique donc pas directement.

20. On peut suivre un schéma de preuve classique pour renforcer ce résultat en

$$\frac{\hat{T}(0, x)}{\|x\|} \rightarrow \hat{\Theta} \text{ presque sûrement et } L^1 \text{ lorsque } \|x\| \rightarrow \infty$$

puis en déduire des résultats de forme asymptotique sur $\hat{S}_t = \{x \in \mathbb{R}^d : \hat{T}(0, x) \leq t\}$.

(e) **Résultats sur le modèle booléen de percolation de premier passage.**

Considérons Σ un modèle booléen dirigé par la mesure $\lambda\nu$ où ν est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . Voir la section 4.1.1 pour la définition. Nous nous intéressons au modèle de percolation de premier passage associé. Nous notons $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ la constante de temps associée. Nous cherchons des conditions sur ν assurant que la constante de temps est strictement positive pour $\lambda > 0$ suffisamment petit. Nous appliquerons ces résultats à la mesure $\nu(dr) = r\mu(dr)$ où μ est la mesure qui apparaît dans la description du modèle de Deijfen.

Dans le modèle de percolation de premier passage associé à Σ , le déplacement est instantané à l'intérieur des composantes connexes de Σ . On en déduit que si Σ percole, la constante de temps $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ est nulle.

Si $\int r^d\nu(dr)$ est infinie, nous savons par la partie facile du théorème 6 que, pour tout $\lambda > 0$, Σ possède une composante connexe non bornée presque sûrement²¹. Par conséquent, si $\int r^d\nu(dr)$ est infinie, $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ est nulle pour tout $\lambda > 0$.

Si par contre $\int r^d\nu(dr)$ est finie, nous savons par le théorème 6 que, pour $\lambda > 0$ suffisamment petit, les composantes connexes de Σ sont bornées presque sûrement. Malheureusement cela ne suffit *a priori* pas pour conclure que $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ est non nulle pour de tels λ . Nous avons développé dans [GM08] des idées différentes. Ces idées mènent au premier point du résultat suivant, qui est implicite dans [GM08] :

Théorème 18 (G.-Marchand) 1. Si

$$\int_0^{+\infty} \nu([r, +\infty))^{1/d} dr < \infty \quad (4.30)$$

est vérifiée alors la constante de temps $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ est strictement positive pour $\lambda > 0$ suffisamment petit.

2. Si

$$\int r^d\nu(dr) < \infty \quad (4.31)$$

n'est pas vérifiée alors la constante de temps $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ est nulle pour tout $\lambda > 0$.

Notons $\lambda^{\widehat{\Theta}}(\nu)$ le supremum des $\lambda > 0$ pour lesquels $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ est strictement positive. Rappelons que $\lambda^c(\nu)$ est le λ critique pour la percolation dans le modèle booléen dirigé par $\lambda\nu$. La discussion précédent le théorème mène à :

$$\lambda^{\widehat{\Theta}}(\nu) \leq \lambda^c(\nu).$$

Si (4.31) n'est pas vérifiée, alors $\lambda^c(\nu) = \lambda^{\widehat{\Theta}}(\nu) = 0$. Si (4.31) est vérifiée alors $\lambda^c(\nu)$ est strictement positif mais nous ne savons pas si $\lambda^{\widehat{\Theta}}(\nu)$ est strictement positif. Si la condition plus forte (4.30) est vérifiée, les deux seuils précédents sont strictement positifs. La question de l'égalité entre $\lambda^{\widehat{\Theta}}(\nu)$ et $\lambda^c(\nu)$ ou $\widehat{\lambda}^c(\nu)$ – qui est dans l'esprit du résultat de Kesten liant percolation et percolation de premier passage, voir autour de (4.24) – est naturelle mais nous ne l'avons pas étudiée avec des conditions d'intégrabilité fortes sur ν . Sous des conditions d'intégrabilités fortes, la question est sans doute abordable.

La mesure μ vérifie (4.27) si et seulement si la mesure $\nu(dr) = r\mu(dr)$ vérifie (4.30). Le lien entre les conditions (4.29) et (4.31) est similaire. Les remarques faites sur les conditions (4.27) et (4.29) se transposent donc aux conditions (4.30) et (4.31).

Notons enfin que le premier point du théorème 18 entraîne le résultat suivant : sous (4.30), pour $\lambda > 0$ suffisamment petit, les composantes connexes de Σ sont presque sûrement bornées.

21. Nous savons même que, pour tout $\lambda > 0$, Σ recouvre presque sûrement tout \mathbb{R}^d .

Autrement dit, (4.30) est une condition suffisante pour $\lambda^c(\nu) > 0$. Notons que (4.30) est vérifiée dès que :

$$\int_1^{+\infty} r^d \ln(r)^{d-1+\varepsilon}$$

est finie pour un $\varepsilon > 0$. L'approche utilisée dans la preuve du théorème 18 fournit donc une preuve alternative d'un résultat proche de celui donné par le théorème 6.

(f) Preuve de (4.28) (modèle de Deijfen) en utilisant le théorème 18 (modèle booléen de percolation de premier passage).

Reprenons le modèle de Deijfen. Fixons un petit paramètre $\lambda > 0$. Si (c, t, r) est un point de Ξ , nous disons que $B(c, r)$ est une boule lente si $t \geq \lambda r$. Sinon, nous disons que c'est une boule rapide. Notons Σ_λ la réunion des boules rapides :

$$\Sigma_\lambda = \bigcup_{\{(c,t,r) \in \Xi: t \leq \lambda r\}} B(c, r).$$

C'est un modèle booléen dirigé par la mesure $\lambda\nu(dr)$ où $\nu(dr) = r\mu(dr)$ et où μ est la loi de R . Notons Θ la constante de temps du modèle de Deijfen et $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ la constante de temps du modèle booléen de premier passage associé au modèle booléen précédent. Nous avons :

$$\Theta \geq \lambda \widehat{\Theta}(\lambda\nu). \quad (4.32)$$

Justifions rapidement (4.32). Considérons une arête (x, y) . Pour établir (4.32) il suffit essentiellement de montrer :

$$\tau(x, y) \geq \lambda \widehat{\tau}(x, y). \quad (4.33)$$

Si $\tau(x, y)$ est infini ou si $x = y$ l'inégalité est claire. Supposons maintenant que ce n'est pas le cas. Il existe alors $(x, t, r) \in \Xi$ tel que $y \in B(x, r) \setminus \{x\}$ et on a $\tau(x, y) = t$. Si $B(x, r)$ est une boule rapide alors, comme $[x, y]$ est inclus dans $B(x, r)$, $\widehat{\tau}(x, y)$ est nul et l'inégalité (4.33) est vérifiée. Si par contre $B(x, r)$ est une boule lente alors $\tau(x, y) = t \geq \lambda r \geq \lambda \|y - x\| \geq \lambda \widehat{\tau}(x, y)$ et l'inégalité (4.33) est une nouvelle fois vérifiée. Cela conclut la preuve de cette inégalité. L'inégalité (4.32) s'en déduit.

Nous pouvons maintenant prouver (4.28). Nous supposons que μ satisfait (4.27). Par conséquent $\nu(dr) = r\mu(dr)$ satisfait (4.30). Par le théorème 18, $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ est donc strictement positif pour λ suffisamment petit. Par (4.32), Θ est donc strictement positif. En combinant ce résultat avec les travaux de Deijfen [46] cela donne (4.28).

Pour établir le premier point du théorème 18, nous introduisons un modèle continu de chemins gourmands. Dans la prochaine section, nous commençons par rappeler le modèle classique sur \mathbb{Z}^d .

(g) Chemins gourmands discrets.

Dans cette section, nous supposons $d \geq 2$. Nous décrivons le modèle des chemins gourmands discrets et énonçons les résultats pertinents pour notre étude. Il n'y a pas de résultats originaux dans cette section. Ce modèle a été introduit par Cox, Gandolfi, Griffin et Kesten dans [43].

Nous commençons par attribuer aux points c de \mathbb{Z}^d des poids aléatoires positifs indépendants $r(c)$ de loi commune ν . Un chemin est ici une suite finie de points distincts de \mathbb{Z}^d tels que la distance euclidienne entre deux points successifs vaut toujours 1. La longueur de ce chemin est alors la somme des longueurs euclidiennes de ses segments. À chaque chemin nous associons un poids qui est la somme des poids de ses points. Si n est un entier naturel, nous notons A_n le

supremum des poids de tous les chemins de longueur n partant de 0. Dans [43], les auteurs ont montré que s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\int_1^{+\infty} r^d (\ln r)^{d+\varepsilon} \nu(dr) < +\infty,$$

alors il existe un réel $M < +\infty$ tel que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{n} \leq M \quad \text{presque sûrement.}$$

Ce résultat a été amélioré dans [64] par Gandolfi et Kesten : sous la même condition, A_n/n converge presque sûrement et dans L^1 vers une constante finie. Martin, dans [102], a obtenu les mêmes résultats sous une hypothèse légèrement plus faible et avec une preuve beaucoup plus simple : si (4.30) est vérifiée alors A_n/n converge presque sûrement et dans L^1 vers une constante finie.

Dans un résultat intermédiaire, il a montré que si (4.30) est vérifiée alors le supremum des $E(A_n/n)$ est fini. Obtenir cette propriété dans un contexte continu s'avère être suffisant pour nos objectifs.

Par ailleurs, d'après les résultats de [43] et [102], si (4.31) n'est pas vérifiée alors A_n/n converge presque sûrement vers l'infini.

(h) Chemins gourmands continus.

Dans notre analogue continu, les points de \mathbb{Z}^d sont remplacés par les points d'un processus de Poisson ponctuel stationnaire sur \mathbb{R}^d .

Fixons une mesure de probabilité ν sur $(0, +\infty)$. Soit $\lambda > 0$. Soit ξ un processus de Poisson ponctuel sur $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ de mesure d'intensité $\lambda |\cdot| \nu$ où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . Notons χ la projection de ξ sur \mathbb{R}^d . Avec probabilité 1, la restriction de la projection à χ est injective et on peut écrire :

$$\xi = \{(c, r(c)), c \in \chi\}.$$

Si c n'appartient pas à χ , nous posons $r(c) = 0$.

Un chemin est ici une suite finie de points distincts de \mathbb{R}^d . (Dans le modèle discret, les points successifs d'un chemin sont supposés être à distance 1 les uns de l'autres. Nous ne faisons pas d'hypothèse similaire dans notre modèle continu, qui n'est donc pas un exact analogue du modèle discret.) Nous notons $|\pi|$ la longueur du chemin, définie comme la somme des longueurs euclidiennes de ses segments. À un chemin $\pi = (x_0, \dots, x_n)$ nous associons un poids $A(\pi)$ de la manière suivante :

$$A(\pi) = \sum_{i=0}^n r(x_i).$$

Nous nous intéressons au supremum S des poids moyens de chemins, défini par :

$$S = \sup \left\{ \frac{A(\pi)}{|\pi|} \right\}, \quad (4.34)$$

où le supremum est pris sur tous les chemins de longueurs non nulles et issus de 0. Nous pouvons, sans changer la valeur du supremum, nous restreindre aux chemins satisfaisant les conditions précédentes et dont tous les points – à l'exception du premier – sont des points de χ .

Dans [GM08], nous démontrons le résultat suivant²². C'est l'analogue pour le modèle continu de résultats connus pour le modèle discret. La preuve est similaire mais peut-être plus naturelle dans le modèle continu.

22. C'est le théorème 1.2 dans [GM08].

Théorème 19 (G.-Marchand) *Supposons $d \geq 2$.*

1. *Si (4.30) alors $E(S)$ est finie²³.*
2. *Si la condition (4.31) n'est pas vérifiée, alors S est presque sûrement infini.*

Notons que si $d = 1$, alors $E(S)$ est infinie dès que λ est strictement positif. Pour vérifier cela, il suffit de minorer S par $r(X)/X$ où X est le premier point strictement positif de χ .

(i) Idées de la preuve du premier point du théorème 18 (modèle booléen de percolation de premier passage) en utilisant le théorème 19 (chemins gourmands continus).

Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. Nous cherchons à minorer

$$\widehat{T}(0, x) = \inf\{\widehat{\tau}(\pi) : \pi \in \mathcal{C}(0, x)\}.$$

Il est possible de se limiter aux chemins dont tout segment vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

- L'une de ses extrémités est un centre de boule et il est inclus dans la boule correspondante.
- Il ne touche aucune boule.

Mais pour un tel chemin $\pi = (x_0, \dots, x_n)$ nous avons :

$$\widehat{\tau}(\pi) \geq |\pi| - 2 \sum_{i=0}^n r(x_i)$$

On a :

$$\frac{\widehat{T}(0, x)}{\|x\|} \geq \inf \left\{ \frac{\widehat{\tau}(\pi)}{|\pi|} \right\} \geq 1 - 2 \sup \left\{ \frac{\sum_{i=0}^n r(x_i)}{|\pi|} \right\} \geq 1 - 2S.$$

En prenant l'espérance et en passant à la limite on obtient :

$$\widehat{\Theta}(\lambda\nu) \geq 1 - 2E(S(\lambda\nu))$$

Mais si ν vérifie (4.30) alors $E(S)$ est finie par le théorème 19. Par un argument de changement d'échelle, on vérifie alors que $E(S)$ est strictement inférieur à $1/2$ pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit. Pour de tels λ , $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$ est donc strictement positif. Par ailleurs, la majoration obtenue pour $E(S(\lambda\nu))$ fournit une minoration de $\widehat{\Theta}(\lambda\nu)$.

(j) Idées de la preuve du résultat sur les chemins gourmands continus.

Le second point du théorème 19 est relativement immédiat. Le supremum des $r(c)\|c\|^{-1}$ pour $c \in \chi$ est déjà presque sûrement infini si (4.31) n'est pas vérifiée.

La preuve du premier point est semblable à la preuve du résultat correspondant dans le modèle discret donnée par Martin dans [102]. L'idée est d'exploiter des arguments de changement d'échelle. Cette idée est très naturelle dans le cadre continu.

Techniquement, nous procédons de la manière suivante. Écrivons $S(\xi)$ pour marquer la dépendance en le processus ponctuel initial. En notant que tout réel positif r s'écrit $r = \int_0^{+\infty} 1_{[\rho, +\infty)}(r) dr$ et en utilisant le fait que le supremum des intégrales est majoré par l'intégrale des supremums, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$ES(\xi) \leq \int_0^{+\infty} ES(\xi^\rho) d\rho,$$

23. Nous obtenons $E(S) \leq C_d \lambda^{1/d} \int \nu([r, +\infty))^{1/d} dr$ pour une constante C_d ne dépendant que de la dimension.

où

$$\xi^\rho = \{(c, 1) : c \in \chi \text{ et } r(c) \geq \rho\}.$$

L'argument de changement d'échelle permet de montrer l'égalité

$$ES(\xi^\rho) = C.(\lambda\nu([\rho, +\infty)))^{1/d}$$

où C désigne l'espérance de S dans le cas où ν est la masse de Dirac en 1 et où $\lambda = 1$. Comme m est fini en dimension $d \geq 2$, cela permet de conclure.

4.2.3 Compétition

(a) Modèle de Häggström et Pemantle

Fixons x_1, \dots, x_k des points distincts de \mathbb{Z}^d , $k \geq 2$, $d \geq 2$. Pour tout indice i , $\{x_i\}$ est le territoire initial de la colonie i . La dynamique a été décrite dans la section 4.2.1 dans le paragraphe dédié à la compétition.

Reprenons les objets définis dans le paragraphe dédié à la percolation de premier passage sur \mathbb{Z}^d de la section 4.2.1. Nous supposons (4.24) et (4.26). Le résultat de forme asymptotique (4.28) est donc vérifié. À l'instant t , le territoire conquis par la colonie i est :

$$\{z \in \mathbb{Z}^d : T(x_i, z) \leq t \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}, T(x_i, z) < T(x_j, z)\}.$$

Le territoire ultimement conquis par cette colonie est :

$$D_i(x_1, \dots, x_k) = \{z \in \mathbb{Z}^d : \forall j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}, T(x_i, z) < T(x_j, z)\}.$$

Compte tenu du résultat de forme asymptotique (4.28), il est naturel de chercher à comparer ce territoire aléatoire à la cellule de Voronoï déterministe suivante :

$$V_i(x_1, \dots, x_k) = \{z \in \mathbb{R}^d : \forall j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}, N(x_i - z) < N(x_j - z)\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, nous notons \tilde{x} l'élément de \mathbb{Z}^d le plus proche. Pour tout $A, B \subset \mathbb{R}^d$ tels que le volume $|B|$ de B est non nul nous définissons $\underline{\text{dens}}(A|B)$, la densité inférieure de A relativement à B , par :

$$\underline{\text{dens}}(A|B) = \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{|A \cap B \cap B(0, R)|}{|B \cap B(0, R)|}.$$

La densité supérieure relative se définit similairement. Dans [Gou07] nous prouvons le résultat suivant :

Théorème 20 (G.) *Soit I l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, k\}$ tels que :*

$$\underline{\text{dens}}(V_i(x_1, \dots, x_k)) > 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité de l'évènement

$$\left\{ \forall i \in I, \overline{\text{dens}}\left(D_i(\widetilde{Rx_1}, \dots, \widetilde{Rx_k})\right) + [-1/2, 1/2]^{[d]} V_i(Rx_1, \dots, Rx_k) \geq 1 - \varepsilon \right\}$$

tend vers 1 lorsque R tend vers l'infini.

Il y a coexistence si chacun des territoires aléatoires est non borné. Notons $\text{Coex}(x_1, \dots, x_k)$ cet évènement. Il est possible de faire coexister deux colonies avec probabilité positive. En dimension $d = 2$ et pour des temps $\tau(x, y)$ exponentiels, c'est un résultat de Häggström et Pemantle [70]. Dans le cas général, c'est un résultat établi indépendamment par Garet et Marchand [66] et par Hoffman [77].

Comme conséquence du théorème 20, nous obtenons le résultat de coexistence suivant :

Théorème 21 (G.) Soient x_1, \dots, x_k , k points distincts de \mathbb{R}^d , $k \geq 2$, $d \geq 2$. Supposons $N(x_i) = 1$ pour tout indice i . Supposons également que, pour tous i, j distincts, le segment $[x_i, x_j]$ contient un point z tel que $N(z) < 1$. Alors la probabilité de l'évènement $\text{Coex}(\widetilde{Rx}_1), \dots, \widetilde{Rx}_n$ tend vers 1 lorsque R tend vers l'infini.

Ce résultat relie le nombre d'infections pouvant coexister avec probabilité positive avec le nombre de faces (éventuellement infini) de la boule unité de N . En dimension 2, c'est un résultat de Hoffman [78].

Des arguments de modifications locales permettent sans doute de montrer que, dès qu'il existe x_1, \dots, x_k vérifiant les conditions du théorème 21, alors pour tout choix raisonnable y_1, \dots, y_k , la probabilité de $\text{Coex}(y_1, \dots, y_k)$ est strictement positive. Nous n'avons pas cherché à montrer un tel résultat.

Le théorème 20 est plus faible que ce que les simulations numériques laissent espérer, au moins en dimension 2. Prenons par exemple $d = 2$, $k = 2$ et fixons x_1 et x_2 . Les simulations numériques laissent imaginer que, dès qu'il y a coexistence, les territoires des deux colonies sont asymptotiquement des cônes. Autrement dit, les deux interfaces entre les territoires admettent une direction asymptotique. Nous ne sommes pas parvenu à obtenir un tel résultat. Un tel résultat existe pour un autre modèle de percolation de premier passage en dimension 2 (voir Pimentel [122]) et pour des modèles de percolation de dernier passage en dimension 2 (voir par exemple Ferrari, Martin et Pimentel [59]).

Signalons enfin une conjecture de Häggström et Pemantle énoncée dans [82] pour des $\tau(x, y)$ exponentiels. Considérons le cas où il n'y a que deux colonies. Dans notre modèle, les deux colonies évoluent à la même vitesse. Modifions notre modèle ainsi : l'une des colonies utilise les temps $\tau(x, y)$ tandis que l'autre utilise les temps $\rho\tau(x, y)$ où $\rho > 0$ est une constante fixée. La conjecture de Häggström et Pemantle s'énonce ainsi : si ρ est différent de 1, alors la coexistence est impossible. Pour l'instant, le résultat le plus fort est dû à Häggström et Pemantle [82] et s'énonce ainsi : la coexistence est possible pour un nombre au plus dénombrable de ρ . Nous renvoyons également à l'article de Garet et Marchand [67]. Des exemples de Deijfen et Häggström [48] montrent par ailleurs qu'aucun argument de monotonie simple semble pouvoir permettre de déduire la conjecture du résultat précédent.

(b) Modèle de Deijfen, Häggström et Bagley

Nous reprenons le modèle de Deijfen décrit dans la section 4.2.2. Nous supposons que le résultat de forme asymptotique pour le modèle de Deijfen est vérifié. Par le théorème 17, obtenu dans [GM08], une condition suffisante est la condition (4.27).

Dans [45], Deijfen, Häggström et Bagley ont associé un modèle de compétition à ce modèle de percolation de premier passage. Le lien entre ces deux modèles est semblable à celui entre la percolation de premier passage sur \mathbb{Z}^d et le modèle de compétition de la section (a).

Nous montrons dans [Gou07] un résultat semblable au théorème 20 pour ce modèle. En corollaire, nous avons un résultat semblable au théorème 21. L'énoncé est cependant plus simple dans ce modèle, compte tenu du fait que la norme limite est ici, à une constante multiplicative près, la norme euclidienne.

Théorème 22 (G.) Soient x_1, \dots, x_k des points distincts de la sphère euclidienne unité de \mathbb{R}^d ($k \geq 2$). Alors la probabilité de $\text{Coex}(Rx_1, \dots, Rx_n)$ tend vers 1 lorsque R tend vers l'infini.

En particulier, il est possible de faire coexister un nombre arbitrairement grand de colonies. Pour 2 colonies, c'est un résultat de Deijfen et Häggström [47].

Le statut de la conjecture de Häggström et Pemantle est la même dans ce cadre (voir Deijfen, Häggström et Bagley [45]).

(c) Idées de la preuve

Dans [Gou07] nous démontrons un résultat sur la forme des territoires pour une classe de modèles semblables à ceux décrits précédemment. Les autres résultats de cet article sont des conséquences de ce résultat. La preuve de ce résultat repose fortement sur deux idées antérieures. Nous décrivons maintenant ces deux idées. Pour simplifier, supposons qu'il n'y a que deux colonies et que les territoires initiaux sont $\{0\}$ et $\{x\}$.

La première idée est apparue indépendamment (et sous deux formes différentes) dans des articles de Garet et Marchand [66] et de Hoffman [77]. Pour tout entier $n \geq 0$, considérons la somme :

$$\sum_{i=0}^{n-1} E(T(-x, ix) - T(0, ix)).$$

Pour tout entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $T(-x, ix) - T(0, ix)$ est majoré par $T(-x, 0)$ (par sous-additivité de T). Par conséquent, si x est suffisamment éloigné de l'origine, nous avons :

$$T(-x, ix) - T(0, ix) \text{ est approximativement majoré par } N(x) \text{ avec une grande probabilité} \quad (4.35)$$

(par un résultat de convergence semblable à (4.23)). Mais pour chaque entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$E(T(-x, ix) - T(0, ix)) = E(T(0, (i+1)x) - T(0, ix))$$

(par stationnarité). Par conséquent la somme vaut :

$$E(T(0, nx)) - E(T(0, 0)).$$

Ainsi :

$$\text{La somme équivaut à } nN(x) \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini} \quad (4.36)$$

(par un résultat de convergence semblable à (4.23)). En utilisant (4.35) et (4.36) (entre autres choses) on peut prouver que, pour la plupart des entiers $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $T(-x, ix) - T(0, ix)$ est d'ordre $N(x)$ avec une grande probabilité. Par conséquent, la plupart des points z de $\mathbb{N}x$ sont tels que $T(-x, z) - T(0, z)$ est d'ordre $N(x)$ avec une grande probabilité. (En particulier, beaucoup de points de $\mathbb{N}x$ appartiennent à $D_2(-x, 0)$ avec une grande probabilité.)

La seconde idée est apparue dans un autre article de Hoffman [78]. Nous exploitons cette idée d'une manière différente. Supposons que y est tel que :

$$N(y-x) < N(y). \quad (4.37)$$

Pour tout z , $T(y, z) - T(x, z)$ est majoré par $T(y, x)$ (par sous-additivité de T). Par conséquent,

$$T(y, z) - T(x, z) \text{ est approximativement majoré par } N(y-x) \text{ avec une grande probabilité,} \quad (4.38)$$

pourvu que la norme de $y-x$ soit suffisamment grande (par un résultat de convergence semblable à (4.23) et par stationnarité). Mais, en utilisant la première idée, on peut alors prouver que la plupart des points z de $-\mathbb{N}y$ sont tels que :

$$T(y, z) - T(0, z) \text{ est d'ordre } N(y) \text{ avec une grande probabilité} \quad (4.39)$$

(pourvu que la norme de y soit suffisamment grande). En écrivant

$$T(x, z) - T(0, z) = (T(y, z) - T(0, z)) - (T(y, z) - T(x, z))$$

et en utilisant (4.37), (4.38) et (4.39) on voit alors que, pour un tel z , $T(x, z) - T(0, z)$ est strictement positif avec une grande probabilité. Pour résumer, nous avons que, sous l'hypothèse (4.37), la plupart des points z de $-\mathbb{N}y$ appartiennent à $D_2(x, 0)$ avec une grande probabilité.

Chapitre 5

Marches aléatoires branchantes avec sélection

5.1 Introduction

Les travaux [BG10] et [BG11] présentés dans cette partie sont le résultat d'une collaboration avec Jean Bérard.

Dans ces travaux, nous sommes intéressés à des modèles introduits et étudiés de manière non mathématiquement rigoureuse par, notamment, Brunet, Derrida, Mueller, Munier et Simon (voir par exemple [30, 31, 32, 34, 35, 36, 50, 131]). Les objets de ces études sont de natures différentes :

1. Systèmes finis de particules en interaction sur \mathbb{R} comportant des étapes de branchement et de sélection.
2. Équation de type F-KPP avec seuil.
3. Équation de type F-KPP avec bruit stochastique.

Les liens entre ces objets sont forts, mais beaucoup de ces liens sont simplement des heuristiques. Les travaux cités ci-dessus sont mathématiques non rigoureux. Ils sont par contre riches en intuitions et en conjectures. Pour les systèmes de particules, ces conjectures portent notamment sur des vitesses de déplacement, des probabilités d'extinction et des généalogies. Pour les équations de type F-KPP perturbées, elles portent notamment sur la vitesse de déplacement d'un front d'onde.

La suite de ce chapitre est organisée ainsi. Nous commençons par présenter rapidement quelques résultats classiques sur les marches aléatoires branchantes. C'est le modèle sur lequel sont basés les deux modèles que nous avons étudiés. Nous présentons ensuite ces deux derniers modèles, énonçons quelques conjectures et nos résultats. Nous donnons ensuite rapidement une vue plus globale de cette thématique en évoquant les liens avec les équations de type F-KPP perturbées et en donnant des références mathématiques sur le sujet. Nous concluons en donnant quelques idées de preuves.

5.2 Marches aléatoires branchantes.

Modèle. Le contenu de cette section est classique. Nous décrivons les marches aléatoires branchantes sur la droite réelle et énonçons quelques résultats utiles pour la suite. Les modèles auxquelles nous nous sommes intéressés dans nos travaux sont construits à partir de celui-ci.

Nous nous plaçons dans le cas particulier des branchements déterministes binaires et des pas indépendants et de même loi. Une marche aléatoire branchante est un système fini de particules

sur \mathbb{R} qui évolue suivant une dynamique markovienne discrète en temps. À l'instant initial, nous plaçons une particule en l'origine. À chaque pas de temps, le système évolue suivant la dynamique suivante :

- division : chaque particule est remplacée par deux particules.
- marche : chaque particule effectue indépendamment un pas aléatoire de loi fixée μ .

Ce modèle possède une généalogie naturelle dans laquelle les positions des particules sont indexées par un arbre binaire enraciné. Les 2^t sommets à distance t de la racine sont associés aux 2^t particules du modèle à l'instant t . Si nous suivons l'une des branches infinies de cet arbre et que nous observons les positions successives des particules, nous observons une marche aléatoire dont les pas suivent la loi μ .

Dans toute la suite, pour simplifier l'exposé, nous supposons que le support de μ est borné.

Loi des grands nombres pour le maximum. Notons M_t^∞ la position de la particule la plus à droite à l'instant t . Notons ψ la transformée de log-Laplace de 2μ définie par :

$$\psi(\lambda) = \ln \left(\int 2 \exp(\lambda x) \mu(dx) \right).$$

Posons :

$$v^\infty = \inf \left\{ \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}, \lambda > 0 \right\}.$$

Le résultat suivant a été prouvé dans les années 1970 par Hammersley [73], Kingman [90] et Biggins [25]. Nous renvoyons à [26] pour un article de synthèse sur ce type de résultats. Une preuve basée sur le théorème de convergence de martingale de Biggins, lui-même démontré par des techniques de *size-biasing* suivant Lyons [99], est donnée dans des notes de Shi [130].

Théorème 23 (Hammersley-Kingman-Biggins)

$$\frac{M_t^\infty}{t} \rightarrow v^\infty \quad \text{presque sûrement.}$$

Hypothèse (5.1). Nous avons supposé que le support de la loi μ était borné. Notons S^+ son maximum. Le comportement des objets que nous étudions dans la suite dépend de la réalisation de l'hypothèse suivante :

$$2\mu(\{S^+\}) < 1. \tag{5.1}$$

L'inégalité (5.1) s'interprète ainsi. Dans notre marche aléatoire branchante, tuons une particule dès qu'elle fait un pas de taille strictement inférieure à S^+ . La structure sous-jacente n'est alors plus l'arbre binaire enraciné mais un arbre de Galton-Watson. Dans cet arbre, le nombre d'enfants de chaque individu suit une loi binomiale de paramètre 2 et $\mu(\{S^+\})$. L'hypothèse (5.1) signifie que cet arbre de Galton-Watson est sous-critique.

L'hypothèse (5.1) est équivalente à chacune des hypothèses suivantes¹ :

- La vitesse v^∞ est strictement inférieure à S^+ .
- Il existe $\lambda^\infty > 0$ tel que $\psi(\lambda^\infty)/\lambda^\infty = \psi'(\lambda^\infty)$.
- La vitesse v^∞ , qui est définie comme un infimum, est un minimum.

1. Ces équivalences se trouvent par exemple dans l'appendice de [BG11] et, sous une forme plus générale dans l'appendice de [83]. Tous ces résultats sont classiques et anciens mais nous ne connaissons pas de référence synthétique plus ancienne.

Sous l'hypothèse (5.1) nous avons :

$$v^\infty = \psi(\lambda^\infty)/\lambda^\infty = \psi'(\lambda^\infty). \quad (5.2)$$

Toujours sous cette hypothèse, nous posons :

$$\chi = \frac{\pi^2}{2} \lambda^\infty \psi''(\lambda^\infty) \in (0, +\infty). \quad (5.3)$$

5.3 Marches aléatoires branchantes avec compétition

Modèle. Reprenons les marches aléatoires branchantes et modifions la dynamique en ajoutant l'étape de sélection suivante : à chaque pas de temps, nous ne conservons que les N particules les plus à droites où N est un entier fixé. Ainsi, à chaque pas de temps, le système évolue suivant la dynamique suivante :

- division : chaque particule est remplacée par deux particules.
- marche : chaque particule effectue indépendamment un pas aléatoire de loi fixée μ .
- sélection : seules les N particules les plus à droites sont conservées.

En particulier, pour tout t suffisamment grand, la taille de la population est constante et égale à N . Notons M_t^N la position de la particule la plus à droite à l'instant t . Si $N = +\infty$, nous retrouvons le modèle sans sélection.

Conjectures. Ce modèle fait partie d'une classe de modèles étudiés de manière non mathématiquement rigoureuse par Brunet, Derrida, Mueller et Meunier depuis 1997 (voir par exemple [30, 31, 32, 34, 35, 36]). Plusieurs conjectures – ne portant pas uniquement sur ce modèle spécifique – ont émergé de ces travaux. En voici trois :

1. Le maximum M_t^N se déplace au premier ordre à une vitesse v^N . On a :

$$v^N = v^\infty - \chi \frac{1}{\ln(N)^2} + 6\chi \frac{\ln \ln N}{(\ln N)^3} + o\left(\frac{\ln \ln N}{(\ln N)^3}\right)$$

où v^∞ est la vitesse du maximum dans le modèle sans sélection et où χ est défini par (5.3). On peut noter que la correction due à la taille finie décroît particulièrement lentement en la taille de la population.

2. Si deux individus sont tirés au sort dans la population d'une génération donnée, le nombre de générations dont il faut remonter pour trouver leur plus récent ancêtre commun est d'ordre $\ln(N)^3$.
3. Si n individus sont tirés au sort dans la population d'une génération donnée, le coalescent associé à leur arbre généalogique converge, une fois correctement renormalisé, vers le coalescent de Bolthausen-Sznitman.

Résultats sur la première conjecture. Par sous-additivité, on vérifie² la convergence presque sûre de M_t^N/t vers une constante déterministe v^N . Comme le nuage de particule reste borné en temps dans ce modèle³, v^N s'interprète comme la vitesse du nuage de particules.

Dans [19], Bérard a établi que l'ordre de grandeur de $v^N - v^\infty$ était $(\ln N)^{-2}$. Dans [BG10], nous avons obtenu le résultat suivant⁴ :

2. Proposition 2 de [BG10].

3. Proposition 1 de [BG10].

4. Notons ζ une variable aléatoire de loi μ . Le théorème 1 de [BG10] est énoncé dans un cadre légèrement plus général. Au lieu de supposer que ζ est borné, nous supposons que la transformée de Laplace $E(\exp(t\zeta))$ est finie

Théorème 24 (Bérard-G.) *Supposons (5.1). Alors, lorsque N tend vers l'infini, nous avons :*

$$v^N = v^\infty - \frac{\chi}{(\log N)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln N)^2}\right).$$

La preuve est basée sur une comparaison avec le modèle décrit dans la partie suivante. Nous donnons les idées principales de cette preuve dans la partie 5.6. Cette preuve s'adapte pour d'autres modèles possédant des ingrédients similaires : branchement et déplacement ; sélection des particules les plus à droites. Par contre, la preuve ne s'adapte pas si l'étape de sélection est remplacée, par exemple, par la suivante :

- sélection : seul un ensemble de N particules choisies uniformément parmi les $3N/2$ les plus à droites sont conservées.

Une correction pour la vitesse en $\ln(N)^{-2}$ est également conjecturée pour ce modèle [30].

Il est possible de raffiner la preuve du théorème 24 pour obtenir le résultat suivant :

$$v^N = v^\infty - \frac{\chi}{(\log N)^2} + O\left(\frac{\ln \ln N}{(\ln N)^3}\right). \quad (5.4)$$

Nous détaillons rapidement comment procéder à la suite de l'énoncé du théorème 25. L'estimation (5.4) nous rapproche de la première conjecture (le terme correctif est borné par une quantité de l'ordre de grandeur prédit) et donne une estimation comparable à celle obtenue pour la vitesse du front dans l'équation F-KPP stochastique par Mueller, Mytnik et Quastel dans [115, 116] (voir la section 5.5 de ce mémoire). Nous ne sommes pas parvenus à établir totalement cette conjecture ni même à donner le signe du terme en O .

Si l'hypothèse (5.1) n'est pas vérifiée, le comportement de v^N est différent .⁵

Résultats sur les deux autres conjectures. Les deux autres conjectures restent ouvertes. Les analogues de ces conjectures ont cependant été démontrées par Berestycki, Berestycki et Schweinsberg [21] dans un contexte voisin, celui du mouvement brownien branchant tué sous une barrière.

5.4 Marches aléatoires branchantes avec barrière.

Modèle. Reprenons le modèle de marches aléatoires branchantes et modifions-le en ajoutant l'étape de sélection suivante : à l'instant t , nous ne conservons que les particules à droite de vt où v est un réel fixé. Ainsi, entre les instants $t - 1$ et t , le système évolue suivant la dynamique suivante :

- division : chaque particule est remplacée par deux particules.
- marche : chaque particule effectue indépendamment un pas aléatoire de loi fixée μ .
- sélection : seules les particules à droite de vt sont conservées.

Il est possible de visualiser la sélection de la manière suivante : une barrière, initialement en l'origine, se déplace à une vitesse v et tue toutes les particules qu'elle dépasse.

Rappelons que v^∞ est la vitesse de l'extrémité droite du nuage de particules dans le modèle sans sélection. Par conséquent, si $v > v^\infty$ le système s'éteint avec probabilité 1. Si par contre

sur un voisinage de l'origine. Le résultat reste par ailleurs vraisemblablement vrai avec des branchements plus généraux comme ceux considérés dans [65], dont nous utilisons le résultat principal. Enfin, tous ces résultats sont vraisemblablement vrais si on remplace l'hypothèse $E(\exp(t\zeta))$ finie pour des t négatifs par $E(\max(-\zeta, 0)^{1+\varepsilon})$ finie pour un $\varepsilon > 0$.

5. La vitesse dans le cas où μ est une loi de Bernoulli est traitée dans la section 7 de [BG10]. Par transformation affine et par domination stochastique, on obtient l'inégalité $v^N \geq S^+ - O(1/N)$ dès que (5.1) n'est pas vérifiée. Mais quand (5.1) n'est pas vérifiée, on a également $S^+ = v^\infty$.

$v < v^\infty$ le système a une probabilité non nulle de survivre éternellement. Nous nous plaçons dans ce régime et posons $v = v^\infty - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Notons $\rho(\varepsilon, t)$ la probabilité que le système de particules survive jusqu'à l'instant t . Notons $\rho(\varepsilon, \infty)$ la probabilité que le système survive éternellement, autrement dit la probabilité de non-extinction.

Résultats sur $\rho(\varepsilon, \infty)$. Gantert, Hu et Shi ont étudié dans [65] le comportement, sous l'hypothèse (5.1), de $\rho(\varepsilon, \infty)$ lorsque ε tend vers 0. Ils ont obtenu le résultat suivant dans un cadre plus général⁶ :

$$\log \rho(\varepsilon, \infty) \sim -\sqrt{\frac{\chi}{\varepsilon}} \quad (5.5)$$

où χ est défini par (5.3). Dans [BG11] nous avons donné, dans notre cadre⁷, une preuve totalement différente de celle de Gantert, Hu et Shi. Nous avons par ailleurs obtenu, toujours dans notre cadre, un résultat légèrement plus fin :

Théorème 25 (Bérard-G.) *Supposons (5.1). Alors :*

$$\log \rho(\varepsilon, \infty) = -\sqrt{\frac{\chi}{\varepsilon}} + O(\log(\varepsilon)). \quad (5.6)$$

Ces résultats avaient été obtenus de manière non mathématiquement rigoureuse par Derrida et Simon dans [50, 131] (voir la section 5.5 de ce mémoire).

Nous donnons la stratégie de la preuve du théorème 25 dans la section 5.6. Nous décrivons très rapidement la stratégie de la preuve originale dans la même section. Notre preuve est moins technique que la preuve originale et permet sans effort d'obtenir un résultat légèrement plus fin. En contre-partie, notre preuve est donnée dans un contexte plus restreint et est également moins robuste. Par exemple, notre preuve s'écroule si la barrière n'est plus affine, c'est-à-dire si entre les étapes $t - 1$ et t nous tuons les particules à gauche de $B(t)$ où B n'est pas affine. La stratégie originale a par contre été utilisée pour prouver des résultats dans ce cadre par Jaffuel [83].

Si (5.1) n'est pas vérifiée, le comportement de $\rho(\varepsilon, \infty)$ est différent⁸. Le cas le plus simple est celui où $2\mu(\{S^+\}) > 1$. Dans ce cas l'arbre de Galton-Watson évoqué lors de l'introduction de l'hypothèse (5.1) est surcritique. Mais comme dans cas $v^\infty = S^+$, $\rho(\varepsilon, \infty)$ tend vers la probabilité de survie de cet arbre lorsque ε tend vers 0. Par conséquent, $\rho(\varepsilon, \infty)$ ne tend pas vers 0.

Résultats sur $\rho(\varepsilon, t)$. Il est également possible de donner des estimations pour $\rho(\varepsilon, t)$:

- Si $0 < u \leq 3/2$ alors $\log(\rho(\varepsilon, \varepsilon^{-u})) \approx -\varepsilon^{-u/3}$.
- Si $3/2 \leq u$ alors $\log(\rho(\varepsilon, \varepsilon^{-u})) \approx \log(\rho(\varepsilon, \infty)) \approx -\varepsilon^{-1/2}$.

Des arguments rapides sont donnés dans la section 8 de [BG10]. Le deuxième point est utilisé dans la preuve du théorème 24 dans [BG10]. Une version précise en est donnée dans le théorème 3 de [BG10]. C'est un résultat intermédiaire dans la preuve de (5.5) dans [65].

Liens avec (5.4). La preuve du théorème 24 donnée dans [BG10] repose sur (5.5), le résultat de Gantert, Hu et Shi. L'estimation (5.4) s'obtient en remplaçant l'utilisation de (5.5) par celle de (5.6) et en optimisant légèrement la preuve.

6. Le branchement qu'ils considèrent est le suivant : une particule situé en un point donne naissance à un processus ponctuel translaté en ce point ; la transformée de Laplace du processus ponctuel précédent est supposé finie sur un voisinage de l'origine.

7. Chaque particule donne naissance à deux particules ; chacune fait ensuite un pas ; les pas sont i.i.d. et bornés.

8. Voir l'appendice de [BG11].

Quelques résultats récents sur des questions voisines. Nous ne donnons que les résultats les plus récents. La non extinction du mouvement brownien branchant avec barrière a été étudiée, dans le même régime que le nôtre, par Berestycki, Berestycki et Schweinsberg [20].

Les marches aléatoires branchantes ont également été étudiées dans le régime où la barrière se déplace à une vitesse critique ou sur-critique. Dans ce cas le système s'éteint. Aidékon et Jaffuel ont étudié la probabilité de survie en temps grand [8]. Aidékon, Hu et Zindy ont considéré la queue de la loi du nombre total d'individus [1]. Dans le même régime mais pour le mouvement brownien branchant, cette question a été considérée par Maillard [100] qui a donné le comportement de la taille de la population en temps grand.

5.5 Liens avec l'équation FKPP

Dans cette partie, nous décrivons rapidement et informellement quelques liens entre les marches branchantes étudiées et des équations de type F-KPP modifiées. Un point de vue synthétique sur ces questions est fourni par des notes de Brunet [33].

Mouvement brownien branchant et équation F-KPP. Considérons le mouvement brownien branchant standard sur la droite réelle. C'est un processus markovien à temps continu qui décrit l'évolution d'un système fini de particules sur \mathbb{R} . À l'instant initial, il y a une particule en l'origine. Cette particule se déplace suivant un mouvement brownien standard. Après un temps exponentiel indépendant de paramètre 1, cette particule se divise en deux particules. Chacune de ces deux particules évolue alors indépendamment selon une dynamique similaire : mouvement brownien et division.

Notons $u(x, t)$ la probabilité qu'il existe une particule à droite de x à l'instant t . McKean [103] a observé que cette fonction était l'unique solution de l'équation F-KPP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2 + u \text{ et } u(x, t = 0) = 1_{(-\infty, 0)}(x).$$

Cette équation a été introduite par Fisher [61] et Kolmogorov, Petrovsky et Piscounov [91]. Cette équation – sans la condition initiale – admet deux solutions triviales : la solution constante égale à 0 et la solution constante égale à 1. Parmi les fonctions à valeurs dans $[0, 1]$, la première solution est instable tandis que la suivante est stable.

Dans [91], il est établi que la solution précédente converge vers une onde stationnaire se déplaçant à vitesse $\sqrt{2}$:

$$u(x + m(t), t) \rightarrow w(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

où

$$\frac{1}{2}w'' + \sqrt{2}w' - w^2 + w = 0$$

et où $m(t)$, la médiane de la position du maximum à l'instant t , satisfait :

$$m(t) \sim \sqrt{2t}.$$

La vitesse du maximum du brownien branchant est donc également la vitesse d'une certaine onde stationnaire pour l'équation F-KPP.

De nombreux travaux ont par la suite exploité ces liens pour obtenir des résultats sur le mouvement brownien branchant et sur les équations F-KPP.

Équations F-KPP perturbées et marches aléatoires branchantes avec sélection. Ce paragraphe est basé en grande partie sur une série de travaux – mathématiquement non rigoureux – de Brunet, Derrida et Simon. Nous renvoyons à [34, 35, 36, 50, 131] et aux notes [33].

La fonction de répartition de M_t^∞ , le maximum à l’instant t de la marche aléatoire branchante, satisfait une équation discrète de type F-KPP. La vitesse v^∞ de M_t^∞ peut alors se voir comme la vitesse de propagation d’une onde stationnaire dans cette équation.

La fonction de répartition de M_t^N , le maximum à l’instant t de la marche aléatoire avec compétition, ne vérifie pas d’équation analogue. Selon Brunet et Derrida, la vitesse v^N de M_t^N se compare néanmoins à la vitesse de propagation d’une onde stationnaire dans deux équations de type F-KPP modifiées.

Le premier modèle est une équation F-KPP avec seuil :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (u - u^2)1_{u \geq 1/N}$$

où la condition initiale est $u(x, t = 0) = 1_{(-\infty, 0)}(x)$. Le facteur $1_{u \geq 1/N}$ est une manière de modéliser le caractère discret du modèle : une proportion de particules est nulle dès qu’elle est inférieure à $1/N$. L’équation est une perturbation d’une équation liée au mouvement brownien branchant. On profite d’une certaine universalité de ces problèmes pour passer par exemple des marches aléatoires branchantes au mouvement brownien branchant.

Le second modèle est une équation F-KPP stochastique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u) + \sqrt{\frac{u(1 - u)}{N}} \dot{W}, \quad (5.7)$$

où \dot{W} est un bruit blanc standard en espace et en temps et où la condition initiale est $u(x, t = 0) = 1_{(-\infty, 0)}(x)$.

Dans les deux cas, si l’on part de la condition initiale $u(x, t = 0) = 1_{(-\infty, 0)}(x)$, on observe la formation d’un front. Brunet et Derrida ont obtenu, pour ces deux modèles, que la vitesse v_N du front se comportait ainsi :

$$v_\infty - v_N \sim \chi(\log N)^{-2}. \quad (5.8)$$

La vitesse du front dans ces deux modèles se comparant à celle de marches aléatoires branchantes avec compétition, la vitesse de ces dernières vérifie également (5.8).

Décrivons très rapidement les arguments utilisés par Brunet et Derrida pour obtenir (5.8). Considérons par exemple l’équation stochastique. À un instant t donné, $u(\cdot, t)$ est positive à gauche de $X(t)$, la position du front, et nulle à droite. Les effets stochastiques dus au terme de bruit équilibrent le terme de création $u(1 - u)$ lorsque u est de l’ordre de $1/N$. Cela amène à chercher la forme stationnaire du front sous la forme d’une fonction satisfaisant l’équation F-KPP à gauche du front, valant $1/N$ autour du front et s’annulant à droite du front. L’étude de l’équation seuillée se ramène au même problème. L’étude de ces fronts se fait en exploitant le caractère explicite des solutions de l’équation F-KPP linéarisée autour de la solution instable constante égale à 0. La vitesse v_N se déduit alors de la forme de ces fronts.

Considérons maintenant les marches aléatoires branchantes avec barrière. Dans notre définition, nous avons placé à l’instant initial une particule en l’origine. Plaçons-la maintenant en x , fixons un $\varepsilon > 0$ et considérons $q_t(x)$, la probabilité de survie jusqu’à l’instant t . On constate alors que $(t, x) \mapsto q_t(-x)$ satisfait une équation similaire : équation de type F-KPP à gauche du front ; identiquement nulle à droite. La seule légère différence est qu’ici on impose la vitesse du front et on cherche la valeur au voisinage du front – cela donne la probabilité de non-extinction

en fonction de la vitesse – tandis que précédemment la valeur au voisinage du front était imposée – elle était liée à N – et on cherchait la vitesse du front. Ce lien a été exploité par Derrida et Simon [50, 131], notamment pour obtenir une estimation de la probabilité de survie en exploitant les travaux précédents sur les équations F-KPP perturbées.

Rappelons que les travaux de Brunet, Derrida, Mueller et Munier vont au-delà de (5.8). Ils étudient notamment l'ordre suivant pour les vitesses ainsi que les généalogies associées à ces processus. Nous renvoyons à [30, 31, 32] pour plus de détails.

Des preuves mathématiques de (5.8) ont été données par Benguria et Depassier [16], Benguria, Depassier et Loss [17] et par Dumortier, Popović et Kaper [53] pour l'équation seuillée, par Conlon et Doering [39] et par Mueller, Mytnik et Quastel [115, 116] pour l'équation stochastique et par Bérard et Gouéré [BG10] pour les marches avec compétition.

5.6 Idées des preuves

Stratégie de la preuve du théorème 24. L'idée clé de la preuve, qui provient d'un article de Pemantle [120], est de comparer ce modèle au modèle de marches aléatoires avec barrières étudié dans la partie 5.4. L'avantage de ce dernier modèle est que les particules y sont beaucoup plus indépendantes. Dans [BG10], nous nous appuyons sur le résultat de Gantert, Hu et Shi (5.5).

Rappelons que dans le modèle avec barrière de paramètre ε , seules survivent les particules qui se déplacent à une vitesse moyenne supérieure à $v^\infty - \varepsilon$. La philosophie de la preuve est que les deux propriétés vagues suivantes sont essentiellement équivalentes :

1. Une marche aléatoire branchante avec barrière de paramètre ε débutant avec N particules en l'origine survit.
2. La marche aléatoire branchante avec compétition de paramètre N se déplace au moins à vitesse $v^\infty - \varepsilon$.

Or le premier modèle s'éteint avec probabilité $(1 - \rho(\varepsilon, \infty))^N$. Cela amène à penser que l'on a $v^N = v^\infty - \varepsilon^N$ où ε^N est tel que :

$$\rho(\varepsilon^N, \infty) \approx 1/N. \quad (5.9)$$

En résolvant l'équation précédente via (5.5) on obtient :

$$\varepsilon_N \sim \chi(p)(\log N)^{-2}$$

ce qui donne le théorème 24.

Décrivons rapidement deux idées supplémentaires permettant de comparer les deux modèles.

Considérons que nos marches branchantes avec barrière et avec compétition sont initialisées avec N particules en l'origine. Il est possible de coupler ces deux modèles de telle sorte que, tant qu'il y a au plus N particules dans le modèle avec barrière, le modèle avec compétition domine le modèle avec barrière. Cet argument est utilisé dans la minoration de la vitesse.

La deuxième idée provient de l'article de Pemantle [120]. Un argument déterministe élémentaire permet de constater que, si une trajectoire atteint un point élevé, alors une portion de sa trajectoire reste au-dessus d'une barrière de pente élevée. Un peu plus précisément, en choisissant convenablement $0 \leq T' \leq T$, si $(0 = x_0, x_1, \dots, x_T)$ atteint un point $x_T \geq vT$, alors il existe t_0 tel que $x_{t_0+t} \geq x_{t_0} + v't$ pour t inférieur à T' et pour un v' proche de v . Cet argument est utilisé dans la majoration de la vitesse.

Ingrédients de la preuve de (5.5) par Gantert, Hu et Shi. Nous donnons rapidement quelques ingrédients de la preuve de (5.5) donnée par Gantert, Hu et Shi. Minoration et majoration de la probabilité $\rho(\varepsilon, \infty)$ sont obtenues par des arguments de premier et second moments. Considérons par exemple la majoration. Fixons un temps t . La probabilité $\rho(\varepsilon, \infty)$ est majorée par la probabilité qu'il existe une particule en vie à l'instant t , *i.e.* une particule qui est restée au-dessus de la barrière $u \mapsto B_-(u) = (v^\infty - \varepsilon)u$ jusqu'à l'instant t . L'une des idées est d'introduire une deuxième barrière $u \mapsto B_+(u)$ au-dessus de la précédente. Si une particule reste jusqu'à l'instant t au-dessus de B_- , alors elle reste confinée jusqu'à un instant $T \leq t$ entre B_- et B_+ puis, si $T < t$ elle dépasse B_+ . Via l'inégalité de Chebyshev et via des changements de mesures pour ramener l'étude d'une marche aléatoire branchante à celle d'une marche aléatoire, on obtient alors une majoration de $\rho(\infty, \varepsilon)$ faisant intervenir des probabilités de confinement pour une marche aléatoire. Il s'agit alors d'étudier suffisamment finement ces probabilités de confinement et choisir la barrière B_+ de manière adéquate.

Signalons également l'article de Jaffuel [83] qui étudie ces probabilités dans le cas où la barrière n'est pas linéaire. Cet article contient notamment une discussion sur le choix de la barrière B_+ .

Stratégie de la preuve du théorème 25. Dans notre preuve du théorème 25 sur la survie des marches aléatoires branchantes avec barrière, nous adoptons une démarche proche de celle – non mathématiquement rigoureuse – de Derrida et Simon et ramenons le problème à l'étude d'une équation de type F-KPP.

Fixons $\varepsilon > 0$. Nous nous intéressons à $\rho(\varepsilon, \infty)$, la probabilité de non-extinction.

Dans la définition de notre modèle de marches aléatoires branchantes avec barrière, nous avons placé à l'instant initial une particule en l'origine. Supposons maintenant qu'à l'instant initial la particule est située en x . Notons $q_t(x)$ la probabilité que le système survive jusqu'à l'instant t et $q_\infty(x)$ la probabilité de non-extinction. Nous nous intéressons à $\rho(\varepsilon, \infty) = q_\infty(0)$.

Notons $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la fonction définie par :

$$\psi(s) = 2s - s^2.$$

Notons \mathcal{H} l'ensemble des fonctions croissantes de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ et nulles sur $(-\infty, 0)$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, définissons $T(h) \in \mathcal{H}$ par :

$$\begin{cases} T(h)(x) & := \psi(E(h(x + \zeta - v))), & x \geq 0 \\ T(h)(x) & := 0, & x < 0 \end{cases}$$

où ζ est un pas de loi μ et où $v = v^\infty - \varepsilon$ est la vitesse de la barrière. Une simple application de la propriété de Markov permet de vérifier les égalités $T(q_t) = q_{t+1}$ et $T(q_\infty) = q_\infty$. C'est le seul argument probabiliste de notre preuve.

Mieux, q_∞ est, en dehors de la fonction identiquement nulle, l'unique point fixe de T . Notre preuve repose sur les deux propriétés suivantes⁹ :

- Si $h \in \mathcal{H}$ est tel que $h(0) > 0$ et $T(h) \leq h$ alors $q_\infty \leq h$.
- Si $h \in \mathcal{H}$ est tel que $T(h) \geq h$ alors $q_\infty \geq h$.

Pour établir ces propriétés, nous utilisons essentiellement la stricte convexité de ψ (pour l'unicité du point fixe) et la monotonie de T : si $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ sont tels que $h_1 \leq h_2$, alors $T(h_1) \leq T(h_2)$.

Nous cherchons à estimer $q_\infty(0) = \rho(\varepsilon, \infty)$. Supposons que les fonctions $c^+, c^- \in \mathcal{H}$ sont telles que $c_+(0) > 0$, $T(c_+) \leq c_+$ et $T(c_-) \geq c_-$. Les propriétés énumérées ci-dessus entraînent

9. Nous écrivons $h_1 \leq h_2$ si $h_1(x) \leq h_2(x)$ pour tout réel x .

alors $c_-(0) \leq \rho(\varepsilon, \infty) \leq c_+(0)$. Il nous reste donc à construire de telles fonctions. Considérons pour cela la version linéarisée suivante de l'équation $T(c) = c$:

$$c(x) = 2E(c(x + \zeta - v)). \quad (5.10)$$

Cette équation admet des solutions réelles explicites sous la forme du produit d'un sinus et d'une exponentielle. En translatant, en multipliant par une constante puis en tronquant convenablement cette solution, nous obtenons une fonction c_+ vérifiant les propriétés désirées. Nous utilisons notamment dans la preuve l'inégalité $\psi(s) \leq 2s$. Nous obtenons une fonction c_- en suivant un schéma similaire. Ne disposant pas de l'inégalité $\psi(s) \geq 2s$, même pour des s petits, il est toutefois nécessaire de remplacer le 2 apparaissant dans (5.10) par une constante légèrement plus faible. De là vient le fait que nous n'obtenons pas mieux qu'un $O(\log(\varepsilon))$ dans notre estimation.

Cette stratégie nous a été inspirée par les articles de Mueller, Mytnik et Quastel [115, 116]. Dans ces travaux, les auteurs étudient la vitesse des fronts dans l'équation F-KPP stochastique (voir 5.5). Dans un résultat intermédiaire, ils sont amenés à étudier l'équation $-vu' = u'' + u(1 - u)$. Dans l'étude de cette dernière équation, comme dans la preuve que nous avons donnée du théorème 25, la philosophie est de comparer les solutions de l'équation étudiée avec celles d'équations convenablement linéarisées. Techniquement, l'implémentation de cette philosophie pour ces deux équations est cependant relativement différente. Signalons pour conclure qu'un résultat analogue à (25) pour la survie pour le mouvement brownien branchant tué sous une barrière découle simplement du résultat évoqué de Mueller, Mytnik et Quastel.

Liste des travaux

- [BG10] Jean Bérard and Jean-Baptiste Gouéré. Brunet-Derrida behavior of branching-selection particle systems on the line. *Comm. Math. Phys.*, 298(2) :323–342, 2010.
- [BG11] Jean Bérard and Jean-Baptiste Gouéré. Survival probability of the branching random walk killed below a linear boundary. *Electron. J. Probab.*, 16 :396–418, 2011.
- [BGP08] Jean Bérard, Jean-Baptiste Gouéré, and Didier Piau. Solvable models of neighborhood-dependent substitution processes. *Math. Biosci.*, 211(1) :56–88, 2008.
- [GM08] Jean-Baptiste Gouéré and Régine Marchand. Continuous first-passage percolation and continuous greedy paths model : linear growth. *Ann. Appl. Probab.*, 18(6) :2300–2319, 2008.
- [GM11] Jean-Baptiste Gouéré and Régine Marchand. Boolean model in high dimensions. Preprint, 2011.
- [Gou03] Jean-Baptiste Gouéré. Diffraction et mesure de Palm des processus ponctuels. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(1) :57–62, 2003.
- [Gou05] Jean-Baptiste Gouéré. Quasicrystals and almost periodicity. *Comm. Math. Phys.*, 255(3) :655–681, 2005.
- [Gou06] Jean-Baptiste Gouéré. Sur un modèle markovien rudimentaire de diffusion atomique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(2) :141–146, 2006.
- [Gou07] Jean-Baptiste Gouéré. Shape of territories in some competing growth models. *Ann. Appl. Probab.*, 17(4) :1273–1305, 2007.
- [Gou08] Jean-Baptiste Gouéré. Subcritical regimes in the Poisson Boolean model of continuum percolation. *Ann. Probab.*, 36(4) :1209–1220, 2008.
- [Gou09] Jean-Baptiste Gouéré. Subcritical regimes in some models of continuum percolation. *Ann. Appl. Probab.*, 19(4) :1292–1318, 2009.
- [Gou10] Jean-Baptiste Gouéré. Percolation in a multiscale boolean model. Preprint, 2010.

Bibliographie

- [1] E. Aidekon, Y. Hu, and O. Zindy. The precise tail behavior of the total progeny of a killed branching random walk. *ArXiv e-prints*, February 2011.
- [2] Michael Aizenman and David J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Comm. Math. Phys.*, 108(3) :489–526, 1987.
- [3] Kenneth S. Alexander. The RSW theorem for continuum percolation and the CLT for Euclidean minimal spanning trees. *Ann. Appl. Probab.*, 6(2) :466–494, 1996.
- [4] Sven Erick Alm and John C. Wierman. Inequalities for means of restricted first-passage times in percolation theory. *Combin. Probab. Comput.*, 8(4) :307–315, 1999. Random graphs and combinatorial structures (Oberwolfach, 1997).
- [5] Peter F. Arndt, Christopher B. Burge, and Terence Hwa. Dna sequence evolution with neighbor-dependent mutation. *Journal of Computational Biology*, 10(3–4) :313–322, 2003.
- [6] Peter F. Arndt and Terence Hwa. Identification and measurement of neighbor-dependent nucleotide substitution processes. *Bioinformatics*, 21(10) :2322–2328.
- [7] A. Auffinger and M. Damron. Limit shapes outside the percolation cone, May 2011.
- [8] Elie Aidekon and Bruno Jaffuel. Survival of branching random walks with absorption. *Stochastic Processes and their Applications*, 121(9) :1901 – 1937, 2011.
- [9] Michael Baake and Moritz Höffe. Diffraction of random tilings : some rigorous results. *J. Statist. Phys.*, 99(1-2) :216–261, 2000.
- [10] Michael Baake and Daniel Lenz. Dynamical systems on translation bounded measures : Pure point dynamical and diffraction spectra. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2004. To appear.
- [11] Michael Baake and Robert V. Moody. Diffractive point sets with entropy. *J. Phys. A*, 31(45) :9023–9039, 1998.
- [12] Michael Baake and Robert V. Moody. Weighted Dirac combs with pure point diffraction. *J. Reine Angew. Math.*, 573 :61–94, 2004.
- [13] Michael Baake, Robert V. Moody, and Peter A. B. Pleasants. Diffraction from visible lattice points and k th power free integers. *Discrete Math.*, 221(1-3) :3–42, 2000. Selected papers in honor of Ludwig Danzer.
- [14] François Baccelli and Pierre Brémaud. *Elements of queueing theory*, volume 26 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. Palm martingale calculus and stochastic recurrences, Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [15] Ajit Balram and Deepak Dhar. Scaling relation for determining the critical threshold for continuum percolation of overlapping discs of two sizes. *Pramana*, 74 :109–114, 2010. 10.1007/s12043-010-0012-0.

- [16] R. Benguria and M. C. Depassier. On the speed of pulled fronts with a cutoff. *Phys. Rev. E*, 75(5), 2007.
- [17] R. Benguria, M. C. Depassier, and M. Loss. Validity of the Brunet-Derrida formula for the speed of pulled fronts with a cutoff. *arXiv :0706.3671*, 2007.
- [18] J. Bérard and D. Piau. Coupling times with ambiguities for particle systems and applications to context-dependent DNA substitution models. *ArXiv e-prints*, December 2007.
- [19] Jean Bérard. An example of brunet-derrida behavior for a branching-selection particle system on \mathbb{Z} . Unpublished - arXiv : 0810.5567, 2008.
- [20] Julien Berestycki, Nathanaël Berestycki, and Jason Schweinsberg. Survival of near-critical branching brownian motion. *Journal of Statistical Physics*, 143 :833–854, 2011. 10.1007/s10955-011-0224-9.
- [21] N. Berestycki, J. Berestycki, and J. Schweinsberg. The genealogy of branching Brownian motion with absorption. *arXiv :1001.2337*, 2010.
- [22] Guillaume Bernuau and Michel Duneau. Fourier analysis of deformed model sets. In *Directions in mathematical quasicrystals*, pages 43–60. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [23] Abram S. Besicovitch and Harald Bohr. Almost periodicity and general trigonometric series. *Acta Math.*, 57 :203–292, 1931.
- [24] Hermine Biermé and Anne Estrade. Covering the whole space with poisson random balls. Prépublication, 2010.
- [25] J. D. Biggins. The first- and last-birth problems for a multitype age-dependent branching process. *Advances in Appl. Probability*, 8(3) :446–459, 1976.
- [26] J. D. Biggins. Branching out. In *Probability and mathematical genetics*, volume 378 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 113–134. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [27] Bartłomiej Błaszczyszyn, Christian Rau, and Volker Schmidt. Bounds for clump size characteristics in the Boolean model. *Adv. in Appl. Probab.*, 31(4) :910–928, 1999.
- [28] Erik I. Broman and Federico Camia. Large- N limit of crossing probabilities, discontinuity, and asymptotic behavior of threshold values in Mandelbrot’s fractal percolation process. *Electron. J. Probab.*, 13 :no. 33, 980–999, 2008.
- [29] Erik I. Broman and Federico Camia. Universal behavior of connectivity properties in fractal percolation models. *Electron. J. Probab.*, 15 :1394–1414, 2010.
- [30] E. Brunet, B. Derrida, A. H. Mueller, and S. Munier. Noisy traveling waves : effect of selection on genealogies. *Europhys. Lett.*, 76(1) :1–7, 2006.
- [31] E. Brunet, B. Derrida, A. H. Mueller, and S. Munier. Phenomenological theory giving the full statistics of the position of fluctuating pulled fronts. *Phys. Rev. E*, 73(5) :056126, May 2006.
- [32] É. Brunet, B. Derrida, A. H. Mueller, and S. Munier. Effect of selection on ancestry : an exactly soluble case and its phenomenological generalization. *Phys. Rev. E (3)*, 76(4) :041104, 20, 2007.
- [33] Éric Brunet. Research lecture on the stochastic fisher-kpp front equation. Lecture given in Marseille 2007, 2007.
- [34] Eric Brunet and Bernard Derrida. Shift in the velocity of a front due to a cutoff. *Phys. Rev. E (3)*, 56(3, part A) :2597–2604, 1997.

- [35] Éric Brunet and Bernard Derrida. Microscopic models of traveling wave equations. *Computer Physics Communications*, 121-122 :376–381, 1999.
- [36] Éric Brunet and Bernard Derrida. Effect of microscopic noise on front propagation. *J. Statist. Phys.*, 103(1-2) :269–282, 2001.
- [37] Robert Burton and Robin Pemantle. Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer-impedances. *Ann. Probab.*, 21(3) :1329–1371, 1993.
- [38] Lincoln Chayes. Aspects of the fractal percolation process. In *Fractal geometry and stochastics (Finsterbergen, 1994)*, volume 37 of *Progr. Probab.*, pages 113–143. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [39] Joseph G. Conlon and Charles R. Doering. On travelling waves for the stochastic Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscunov equation. *J. Stat. Phys.*, 120(3-4) :421–477, 2005.
- [40] R. Consiglio, D. R. Baker, G. Paul, and H. E. Stanley. Continuum percolation thresholds for mixtures of spheres of different sizes. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 319 :49 – 55, 2003.
- [41] J.M. Cowley. *Diffraction Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1995. 3rd ed.
- [42] J. Theodore Cox and Richard Durrett. Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Ann. Probab.*, 9(4) :583–603, 1981.
- [43] J. Theodore Cox, Alberto Gandolfi, Philip S. Griffin, and Harry Kesten. Greedy lattice animals. I. Upper bounds. *Ann. Appl. Probab.*, 3(4) :1151–1169, 1993.
- [44] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes. Vol. I.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2003. Elementary theory and methods.
- [45] M. Deijfen, O. Häggström, and J. Bagley. A stochastic model for competing growth on \mathbf{R}^d . *Markov Process. Related Fields*, 10(2) :217–248, 2004.
- [46] Maria Deijfen. Asymptotic shape in a continuum growth model. *Adv. in Appl. Probab.*, 35(2) :303–318, 2003.
- [47] Maria Deijfen and Olle Häggström. Coexistence in a two-type continuum growth model. *Adv. in Appl. Probab.*, 36(4) :973–980, 2004.
- [48] Maria Deijfen and Olle Häggström. Nonmonotonic coexistence regions for the two-type Richardson model on graphs. *Electron. J. Probab.*, 11 :no. 13, 331–344 (electronic), 2006.
- [49] Maria Deijfen and Olle Häggström. The pleasures and pains of studying the two-type Richardson model. In *Analysis and stochastics of growth processes and interface models*, pages 39–54. Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [50] B. Derrida and D. Simon. The survival probability of a branching random walk in presence of an absorbing wall. *Europhys. Lett. EPL*, 78(6) :Art. 60006, 6, 2007.
- [51] Deepak Dhar. On the critical density for continuum percolation of spheres of variable radii. *Physica A : Statistical and Theoretical Physics*, 242(3-4) :341 – 346, 1997.
- [52] Deepak Dhar and Mohan K. Phani. Continuum percolation with discs having a distribution of radii. *J. Phys. A*, 17 :L645–L649, 1984.
- [53] Freddy Dumortier, Nikola Popović, and Tasso J. Kaper. The critical wave speed for the Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov equation with cut-off. *Nonlinearity*, 20(4) :855–877, 2007.
- [54] Laurent Duret and Nicolas Galtier. The covariation between tpa deficiency, cpg deficiency, and g+c content of human isochores is due to a mathematical artifact. *Molecular Biology and Evolution*, 17(11) :1620–1625, 2000.

- [55] Steven Dworkin. Spectral theory and x-ray diffraction. *J. Math. Phys.*, 34(7) :2965–2967, 1993.
- [56] Daniel Díaz. Percolation for the stable marriage of poisson and lebesgue with random appetites. Technical Report arXiv :0909.5325, Sep 2009. Comments : 9 pages.
- [57] Youssef El H elou. Recouvrement du tore T^q par des ouverts aléatoires et dimension de Hausdorff de l’ensemble non recouvert. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(12) :A815–A818, 1978.
- [58] Mikael Falconnet. Phylogenetic distances for neighbour dependent substitution processes. *Math. Biosci.*, 224(2) :101–108, 2010.
- [59] Pablo A. Ferrari, James B. Martin, and Leandro P. R. Pimentel. A phase transition for competition interfaces. *Ann. Appl. Probab.*, 19(1) :281–317, 2009.
- [60] Michael E. Fisher and John Stephenson. Statistical mechanics of dimers on a plane lattice. II. Dimer correlations and monomers. *Phys. Rev. (2)*, 132 :1411–1431, 1963.
- [61] R. A. Fisher. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, 7 :355–369, 1937.
- [62] M. V. Freire, S. Popov, and M. Vachkovskaia. Percolation for the stable marriage of Poisson and Lebesgue. *Stochastic Process. Appl.*, 117(4) :514–525, 2007.
- [63] D. Gale and L. S. Shapley. College Admissions and the Stability of Marriage. *Amer. Math. Monthly*, 69(1) :9–15, 1962.
- [64] Alberto Gandolfi and Harry Kesten. Greedy lattice animals. II. Linear growth. *Ann. Appl. Probab.*, 4(1) :76–107, 1994.
- [65] Nina Gantert, Yueyun Hu, and Zhan Shi. Asymptotics for the survival probability in a killed branching random walk. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 47(1) :111–129, 2011.
- [66] Olivier Garet and Régine Marchand. Coexistence in two-type first-passage percolation models. *Ann. Appl. Probab.*, 15(1A) :298–330, 2005.
- [67] Olivier Garet and Régine Marchand. First-passage competition with different speeds : positive density for both species is impossible. *Electron. J. Probab.*, 13 :no. 70, 2118–2159, 2008.
- [68] E. N. Gilbert. Random plane networks. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 9 :533–543, 1961.
- [69] Geoffrey Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.
- [70] Olle Häggström and Robin Pemantle. First passage percolation and a model for competing spatial growth. *J. Appl. Probab.*, 35(3) :683–692, 1998.
- [71] Peter Hall. On continuum percolation. *Ann. Probab.*, 13(4) :1250–1266, 1985.
- [72] Peter Hall. *Introduction to the theory of coverage processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.
- [73] J. M. Hammersley. Postulates for subadditive processes. *Ann. Probability*, 2 :652–680, 1974.
- [74] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif*, pages 61–110. Springer-Verlag, New York, 1965.

- [75] A. Hof. Diffraction by aperiodic structures at high temperatures. *J. Phys. A*, 28(1) :57–62, 1995.
- [76] A. Hof. On diffraction by aperiodic structures. *Comm. Math. Phys.*, 169(1) :25–43, 1995.
- [77] Christopher Hoffman. Coexistence for Richardson type competing spatial growth models. *Ann. Appl. Probab.*, 15(1B) :739–747, 2005.
- [78] Christopher Hoffman. Geodesics in first passage percolation. *Ann. Appl. Probab.*, 18(5) :1944–1969, 2008.
- [79] Christopher Hoffman, Alexander E. Holroyd, and Yuval Peres. Tail bounds for the stable marriage of poisson and lebesgue. *Canad. J. Math.* To appear, available at arXiv :math/0507324.
- [80] Christopher Hoffman, Alexander E. Holroyd, and Yuval Peres. A stable marriage of Poisson and Lebesgue. *Ann. Probab.*, 34(4) :1241–1272, 2006.
- [81] C. Douglas Howard. Models of first-passage percolation. In *Probability on discrete structures*, volume 110 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 125–173. Springer, Berlin, 2004.
- [82] Olle Häggström and Robin Pemantle. Absence of mutual unbounded growth for almost all parameter values in the two-type richardson model. *Stochastic Processes and their Applications*, 90(2) :207 – 222, 2000.
- [83] B. Jaffuel. The critical barrier for the survival of the branching random walk with absorption. *arXiv :0911.2227*, 2009.
- [84] Jean-Pierre Kahane. *Some random series of functions*, volume 5 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1985.
- [85] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.
- [86] Richard Kenyon. Local statistics of lattice dimers. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(5) :591–618, 1997.
- [87] János Kertész and Tamás Vicsek. Monte carlo renormalization group study of the percolation problem of discs with a distribution of radii. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 45 :345–350, 1982. 10.1007/BF01321871.
- [88] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d’été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, volume 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–264. Springer, Berlin, 1986.
- [89] Harry Kesten. Asymptotics in high dimensions for percolation. In *Disorder in physical systems*, Oxford Sci. Publ., pages 219–240. Oxford Univ. Press, New York, 1990.
- [90] J. F. C. Kingman. The first birth problem for an age-dependent branching process. *Ann. Probability*, 3(5) :790–801, 1975.
- [91] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piscounov. Etude de l’équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Bull. Univ. Etat Moscou Sér. Int. Sect. A Math. Mécan.*, 1(6) :1–25, 1937.
- [92] Jeffrey C. Lagarias. Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction. In *Directions in mathematical quasicrystals*, volume 13 of *CRM Monogr. Ser.*, pages 61–93. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [93] Jeffrey C. Lagarias and Peter A. B. Pleasants. Repetitive Delone sets and quasicrystals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(3) :831–867, 2003.
- [94] T. LaGatta and J. Wehr. A shape theorem for Riemannian first-passage percolation. *J. Math. Phys.*, 51(5) :053502, 14, 2010.

- [95] J.-Y. Lee, R. V. Moody, and B. Solomyak. Pure point dynamical and diffraction spectra. *Ann. Henri Poincaré*, 3(5) :1003–1018, 2002.
- [96] Jeong-Yup Lee, Robert V. Moody, and Boris Solomyak. Consequences of pure point diffraction spectra for multiset substitution systems. *Discrete Comput. Geom.*, 29(4) :525–560, 2003.
- [97] Daniel Lenz and Nicolae Strungaru. Pure point spectrum for measure dynamical systems on locally compact abelian groups. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 92(4) :323–341, 2009.
- [98] Ron Lifshitz. Quasicrystals : a matter of definition. *Found. Phys.*, 33(12) :1703–1711, 2003. Special issue dedicated to David Mermin, Part III.
- [99] Russell Lyons. A simple path to Biggins’ martingale convergence for branching random walk. In *Classical and modern branching processes (Minneapolis, MN, 1994)*, volume 84 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 217–221. Springer, New York, 1997.
- [100] P. Maillard. The number of absorbed individuals in branching Brownian motion with a barrier. *ArXiv e-prints*, April 2010.
- [101] M. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62 :331–358, 1974.
- [102] James B. Martin. Linear growth for greedy lattice animals. *Stochastic Process. Appl.*, 98(1) :43–66, 2002.
- [103] H. P. McKean. Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(3) :323–331, 1975.
- [104] Ronald Meester and Rahul Roy. *Continuum percolation*, volume 119 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [105] Ronald Meester, Rahul Roy, and Anish Sarkar. Nonuniversality and continuity of the critical covered volume fraction in continuum percolation. *J. Statist. Phys.*, 75(1-2) :123–134, 1994.
- [106] M. V. Men’shikov. Coincidence of critical points in percolation problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 288(6) :1308–1311, 1986.
- [107] M. V. Men’shikov, S. A. Molchanov, and A. F. Sidorenko. Percolation theory and some applications. In *Probability theory. Mathematical statistics. Theoretical cybernetics, Vol. 24 (Russian)*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 53–110, i. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986. Translated in *J. Soviet Math.* 42 (1988), no. 4, 1766–1810.
- [108] M. V. Menshikov, S. Yu. Popov, and M. Vachkovskaia. On the connectivity properties of the complementary set in fractal percolation models. *Probab. Theory Related Fields*, 119(2) :176–186, 2001.
- [109] M. V. Menshikov, S. Yu. Popov, and M. Vachkovskaia. On a multiscale continuous percolation model with unbounded defects. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 34(3) :417–435, 2003. Sixth Brazilian School in Probability (Ubatuba, 2002).
- [110] M. V. Men’shikov and A. F. Sidorenko. Coincidence of critical points in Poisson percolation models. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 32(3) :603–606, 1987.
- [111] Yves Meyer. *Algebraic numbers and harmonic analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1972. North-Holland Mathematical Library, Vol. 2.
- [112] Yves Meyer. Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers. In *Beyond quasicrystals (Les Houches, 1994)*, pages 3–16. Springer, Berlin, 1995.

- [113] S. A. Molchanov, V. F. Pisarenko, and A. Ya. Reznikova. Multiscale models of failure and percolation. *Physics of The Earth and Planetary Interiors*, 61(1-2) :36–43, 1990.
- [114] Jesper Møller. *Lectures on random Voronoï tessellations*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [115] C. Mueller, L. Mytnik, and J. Quastel. Small noise asymptotics of traveling waves. *Markov Process. Related Fields*, 14, 2008.
- [116] Carl Mueller, Leonid Mytnik, and Jeremy Quastel. Effect of noise on front propagation in reaction-diffusion equations of kpp type. *Inventiones Mathematicae*, 184 :405–453, 2011. 10.1007/s00222-010-0292-5.
- [117] J. Neveu. Processus ponctuels. In *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour, VI—1976*, pages 249–445. Lecture Notes in Math., Vol. 598. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [118] International Union of Crystallography. *Acta Cryst. A*, 48 :922–946, 1992.
- [119] M. E. Orzechowski. On the phase transition to sheet percolation in random Cantor sets. *J. Statist. Phys.*, 82(3-4) :1081–1098, 1996.
- [120] Robin Pemantle. Search cost for a nearly optimal path in a binary tree. *Ann. Appl. Probab.*, 19(4) :1273–1291, 2009.
- [121] Mathew D. Penrose. Continuum percolation and Euclidean minimal spanning trees in high dimensions. *Ann. Appl. Probab.*, 6(2) :528–544, 1996.
- [122] Leandro P. R. Pimentel. Multitype shape theorems for first passage percolation models. *Adv. in Appl. Probab.*, 39(1) :53–76, 2007.
- [123] Serguei Yu. Popov and Marina Vachkovskaia. A note on percolation of Poisson sticks. *Braz. J. Probab. Stat.*, 16(1) :59–67, 2002.
- [124] Martine Queffélec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, volume 1294 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [125] John A. Quintanilla and Robert M. Ziff. Asymmetry in the percolation thresholds of fully penetrable disks with two different radii. *Phys. Rev. E*, 76(5) :051115, Nov 2007.
- [126] A. Sapozhnikov. Existence of phase transition for heavy-tailed continuum percolation. *Markov Process. Related Fields*, 13(3) :575–586, 2007.
- [127] Martin Schlottmann. Generalized model sets and dynamical systems. In *Directions in mathematical quasicrystals*, pages 143–159. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [128] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1951–1953, 1984.
- [129] L. A. Shepp. Covering the line with random intervals. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 23 :163–170, 1972.
- [130] Zhan Shi. Random walks and trees. Lecture notes, Guanajuato, México, November 3-7, 2008, 2010.
- [131] Damien Simon and Bernard Derrida. Quasi-stationary regime of a branching random walk in presence of an absorbing wall. *J. Stat. Phys.*, 131(2) :203–233, 2008.
- [132] Boris Solomyak. Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(3) :695–738, 1997.
- [133] Boris Solomyak. Spectrum of dynamical systems arising from Delone sets. In *Quasicrystals and discrete geometry (Toronto, ON, 1995)*, pages 265–275. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

- [134] Hideki Tanemura. Critical behavior for a continuum percolation model. In *Probability theory and mathematical statistics (Tokyo, 1995)*, pages 485–495. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
- [135] Damien G. White. On the value of the critical point in fractal percolation. *Random Structures Algorithms*, 18(4) :332–345, 2001.
- [136] S. A. Zuev and A. F. Sidorenko. Continuous models of percolation theory. I. *Teoret. Mat. Fiz.*, 62(1) :76–86, 1985.
- [137] S. A. Zuev and A. F. Sidorenko. Continuous models of percolation theory. II. *Teoret. Mat. Fiz.*, 62(2) :253–262, 1985.