Université François-Rabelais
Année Universitaire 2007-08

L3 Mathématiques
Géométrie élémentaire

Epreuve Intermédiaire du Vendredi 9 Novembre

Sans documents, durée 2h

On pourra , après les avoir énoncés correctement, utiliser les résultats vus en TD sans les redémontrer.

Problème

Dans le plan affine $\mathcal{E}$, on considère quatre points distincts A, B, A' et B' . On suppose que :

- les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles,
- les droites (AA') et (BB') se coupent en un point I,
- les droites (AB') et $(A'B)$ se soupent en un point J,
- la droite (IJ) coupe la droite (AB) en un point D et la droite $(A'B')$ en un point D'.

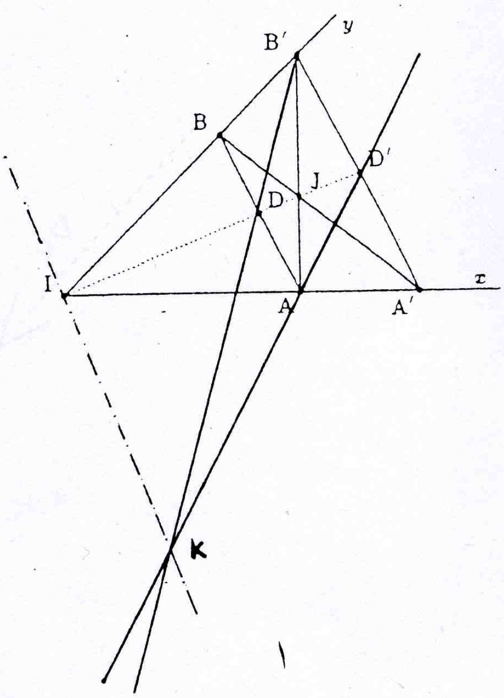
Partie A) On désigne par h_I l'homothétie de centre I qui transforme A en A' et h_J l'homothétie de centre J qui transforme A en B'. On notera k_I et k_J leur rapport respectif.

1)Etablir que $h_I(B) = B'$ et $h_J(A') = B$.

2) Grâce à l'application composée $h_J^{-1} \circ h_I$ établir que D est le milieu de $[AB]$ et D' celui de $[A'B']$.

3) Retrouver ce résultat grâce au théorème de Céva.

4) Démontrer que les droites (AD') et $(B'D)$ se coupent en un point K tel que les droites (IK) et (AB) sont parallèles. On pourra considérer l'homothétie h_K de centre K qui transforme A en D' et étudier $h_K^{-1} \circ h_I$.



Partie B) On se propose de retrouver les résultats de la partie A) via un choix de repère judicieux .

Dans le repère $(I, \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$, il existe un réel λ de sorte que $A'(\lambda, 0)$ et $B'(0, \lambda)$.

1) Déterminer une équation des droites (AB') et $(A'B)$ et en déduire que $\lambda \notin \{1, -1\}$.

2) Retrouver les résultats de la question A2) .

3) Retrouver les résultats de la question A3) .

Exercice 1

Soit ABC un triangle non aplati du plan affine euclidien et soit G barycentre de points (A, α), (B, β) et (C, γ). On désigne par A_1 (resp. B_1 et C_1) le milieu de $[BC]$ (resp. de $[CA]$ et de $[AB]$), par A' (resp. B' et C') le barycentre des points (B, β) et (C, γ) (resp. des points (A, α),(C, γ) et des points (A, α), (B, β)).

1) a) Redémontrer le plus rapidement possible que les droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1) sont concourantes en un point I dont on précisera les coordonnées barycentriques.

b) Etablir que A' est le point d'intersection de droites (BC) et (AG).

2) Etablir que G barycentre de points $(A', \beta + \gamma)$, $(B', \alpha + \gamma)$ et $(C', \alpha + \beta)$.

T.S.V.P.

On suppose désormais que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

3)Démontrer que $A"$ est barycentre des points $(A, -\alpha)$, $(B, 1-\beta)$ et $(C, 1-\gamma)$.

4a) Démontrer que les droites $(AA")$, $(BB")$ et $(CC")$ sont concourantes en un point G'.

b) Etablir que les points G, I et G' sont alignés.

5) Faire une figure illustrant la question 4).

Exercice 2

Soit ABC un triangle non aplati du plan affine euclidien

On désigne par a, b et c les nombres réels positifs $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Soit O le centre du cercle inscrit au triangle dont on note r le rayon ; on rappelle que O est le point d'intersection des bissectrices intérieures Δ_A, Δ_B et Δ_C.

1)En considérant les triangles OBC OCA et OAB retrouver que O est barycentre des points $(A, a), (B, b), (C, c)$.

2)**Bonus** On considère les bissectrices extérieures Δ'_A et Δ'_B.

a) Démontrer qu'une équation de Δ'_A est $\det(\overrightarrow{AM}, b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}) = 0$ et une équation de Δ'_B est $\det(\overrightarrow{BM}, c\overrightarrow{BC} - a\overrightarrow{BA}) = 0$.

b) Démontrer que les trois bissectrices Δ'_A, Δ'_B et Δ_C sont concourantes en un point O_C, centre d'un cercle tangent à l'extérieur du triangle aux trois cotés de celui-ci.

c)Démontrer que les coordonnées barycentriques du point O_C sont $(A, a), (B, b), (C, -c)$.