Chapitre 1

Introduction

Voici le programme :

1. Introduction
   - Cinématique : notion mobile, repère , référentiel, trajectoire etc ...
   - Outils vectoriels : dérivées des fonctions vectorielles, interprétation cinématique. Produit vectoriel
   - Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes, polaires, cylindriques
2. Cinématique et Courbes paramétrées
   - Courbes en coordonnées cartésiennes, le cas des graphes
   - Courbes en polaires
   - Coniques
   - Paramétrages des courbes implicites
   - Courbes dans l'espace
3. Propriétés métriques des Courbes
   - Longueur d'une courbe
   - Repère de Fresnet, expression vitesse accélération dans ce repère
   - Courbure, développée, développante
4. Retour sur la Cinématique
   - Mouvement rectiligne circulaire uniforme , uniformément accéléré
   - Mouvement à accélération centrale et lien avec les coniques et les mouvements des planètes (Loi de Képler)

1.1 Qu'est ce que la cinématique ?

La cinématique est l'art de décrire les mouvements de l'objet considéré. Nous nous limiterons à la cinématique du point ....

Qui dit mouvement, dit notion de temps et de repérage dans l'espace ou dans le plan.

1.1.1 Mesure du temps

La mécanique dite classique se base sur le principe de l'universalité du temps . Par conséquent, on sait synchroniser deux horloges et une fois fait les deux horloges restent synchrones. Par opposition, la mécanique relativiste, elle, implique que le temps ne saurait être universel car le signal de synchronisation se propage à une vitesse finie (inférieure à celle de la lumière qui en mécanique relativiste est une constante universelle). Le temps sera donc mesuré à l'aide d'une horloge "étalon". Rappelons ici pour mémoire la définition d'une seconde (cette définition ayant évoluée avec la technologie) :

Définition 1. *La seconde est l'unité de mesure du temps équivalant à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atôme de césium*[1] *133.*

1.1.2 Mesure des longueurs

En mécanique classique, quel que soit l'observateur une barre a toujours la même longueur. Pour la mesurer, on se reporte à la longueur d'un mètre "étalon". Mais pour mesurer ces longueurs , encore faut-il définir ce que l'on appelle une "métrique" et des systèmes de coordonnées ; on va donc commencer par se rappeler que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces affines euclidiens autrement dit des espaces dont les éléments sont des points mais entre deux points A et B on peut tracer des vecteurs qui sont soit des éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ soit $\mathbb{R}^3$ et que l'on sait calculer des distances entre ces deux points car on sait calculer des normes de vecteurs.....Voyons cela de plus près.

1.2 Calcul vectoriel

1.2.1 Définitions utiles

Définition 2. *On appelle espace vectoriel $\vec{E}$ sur un corps K un ensemble muni d'une addition, notée + et d'une multiplication externe, notée . tel*

1. Découvert en 1861 par BUNSEN et KIRCHHOFF par analyse spectrale , le césium est un métal alcalin analogue au potassium, moû, jaune pâle à l'état naturel. Il est de densité 1,9 et fond à 28˚c et boût à 670˚c

que :

1. *(E,+) est un groupe commutatif*
2. *pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartenant à $\vec{E}$ et pour tout λ et μ appartenant à K*

$$\lambda.(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda.\vec{u}+\lambda.\vec{v}\,;\ (\lambda\mu).\vec{u} = \lambda.(\mu.\vec{u})\,;\ 1.\vec{u} = \vec{u}\,;\ (\lambda+\mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u}$$

Exemples utilisés : $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ .... Dans ce cours , ce sont en général des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ pusique le plan peut-être confondu avec $\mathbb{R}^2$ et l'espaceambiant avec $\mathbb{R}^3$. En général on note $\lambda\vec{u}$ au lieu de $\lambda.\vec{u}$ afin d'éviter toute confusion avec le produit scalaire (voir plus loin). On a vu l'an dernier :

Définition 3. *Un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une partie génératrice (définition .....) de cardinal fini.*

Définition 4. *Un famille $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de vecteurs est une base de l'espace vectoriel $\vec{E}$ si c'est une famille libre qui engendre l'espace vectoriel ou de facon équivalente si pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\vec{E}$ il existe un unique n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ tel que $\vec{u} = \sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$*

Toutes les bases de $\vec{E}$ ont même cardinal : c'est la dimension de $\vec{E}$.

Pour $\mathbb{R}^2$, on a l'habitude de noter $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ les deux vecteurs $\vec{\imath} = (1,0), \vec{\jmath} = (0,1)$; ils forment une base souvent appelée canonique de $\mathbb{R}^2$ puisque chaque couple (x,y) s'écrit de manière unique $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

De même, $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois et on a l'habitude de noter $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ la base $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

$\mathbb{R}^2$ est un Espace vectoriel euclidien

Dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, on peut définir le produit scalaire de deux vecteurs par :

$$\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2, \quad \text{si } \vec{u} = (u_1,u_2), \vec{v} = (v_1,v_2).$$

Proposition 1. *Le produit scalaire vérifie les propréiéts suivantes :*

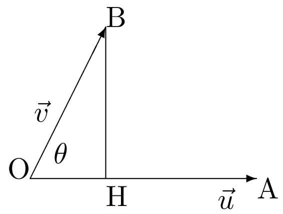
1. **Symétrie** *pour tout $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$*
2. **linéarité par rapport à $\vec{u}$ (1)** *pour tout λ appartenant à $\mathbb{R}$ et pour tout $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$,*
$$(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda\vec{u}.\vec{v}$$
3. **linéarité par rapport à $\vec{u}$ (2)***pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans $\mathbb{R}^2$,*
$$(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$$
4. *pour tout $\vec{u}$ appartenant à $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$*

5. *pour tout $\vec{u}$ appartenant à $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}.\vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$*

La définition proposée est analytique mais on peut en donner une définition géométrique (qui est équivalente) qui a l'avantage de ne pas dépendre de la base mais est plus délicate pour prouver les propriétés en particulier celle de symétrie. La propriété de linéarité (1) ferait appel quant à elle au théorème de Thalès .....

Voici la définition géométrique : si $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, on pose :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$$



Définition 5. *1. Deux vecteurs sont dit orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.*

2. L'application qui à un vecteur $\vec{u}$ associe $\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ est appelé norme sur $\mathbb{R}^2$.

3. Un vecteur $\vec{u}$ de norme 1 est dit unitaire.

Exemples : 1) Par construction, les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ sont orthogonaux et unitaires.

2) Si θ est un nombre réel, on note :

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{v}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{\jmath} = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux et unitaires. On admettra

Théorème 1. *Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$ du plan $\mathbb{R}^2$, il existe une unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ de sorte que $\vec{u} = \vec{u}_\theta$.*

Et à cause des propriétés bien connues de la fonction cosinus, on sait que $\vec{u} = \vec{u}_{\theta'}$ où $\theta' = \theta + 2k\pi$.

Définition 6. *Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique réel $\alpha \in [0, \pi]$ de sorte que*

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = ||\vec{u}_1||||\vec{u}_2|| \cos\alpha.$$

α est appelée mesure de l'angle (non orienté) des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

C'est une conséquence du fait que le rapport $\dfrac{\vec{u}_1.\vec{u}_2}{||\vec{u}_1||||\vec{u}_2||}$ est un réel $\in [-1, 1]$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et que tout réel $t \in [-1, 1]$ s'écrit sous la forme $\cos\alpha$.

Proposition 2. Inégalité de Cauchy-Schwarz *Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, on*

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||.$$

Preuve : $P(t) = ||\vec{u} + t\vec{v}||^2$ est un polynôme de degré 2 en la variable réelle t dont le discriminant réduit est $\Delta = (\vec{u}_1.\vec{u}_2)^2 - ||\vec{u}_1||^2||\vec{u}_2||^2$.Mais l'on doit avoir $P(t)$ positif quelque soit t. Donc le discriminant doit être négatif pour qu'il n'y ait pas de racines ni de changement de signe....

Produit scalaire dans l'espace

De même, on peut définir dans $\mathbb{R}^3$ un produit scalaire en posant

$$\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \quad \text{si } \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

$\mathbb{R}^n$ est un Espace vectoriel euclidien

On peut bien sûr généraliser la définition vue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ en posant dans $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad \text{si } \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n), \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n).$$

Ce produit scalaire fait de $\mathbb{R}^n$ un Espace vectoriel euclidien :

Définition 7. *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est dit euclidien s'il est de dimension fini sur $\mathbb{R}$ et s'il est muni d'un produit scalaire φ défini de $\vec{E} \times \vec{E} \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *pour tout $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\vec{E}$, $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u})$*
2. *pour tout λ appartenant à $\mathbb{R}$ et pour tout $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\vec{E}$, $\varphi(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}, \vec{v})$*
3. *pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans $\vec{E}$, $\varphi(\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{w}, \vec{v})$*
4. *pour tout $\vec{u}$ appartenant à $\vec{E}$, $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$*
5. *pour tout $\vec{u}$ appartenant à $\vec{E}$, $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$*

Remarque : dans les espaces courants, on adopte la notation $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$ ou $< \vec{u}, \vec{v} >$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$. Comme dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs sont dit orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Un vecteur $\vec{u}$ de norme 1 est dit unitaire.

Un espace vectoriel de dimension quelconque muni d'un produit scalaire φ est appelé préhilbertien. L'étude de ces produits scalaires fera l'objet du cours d'algèbre du second semestre.

Définition 8. *Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien . Une base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est orthonormée si pour tout i et j $\vec{e}_i.\vec{e}_j = 0$ et $||\vec{e}_i|| = 1$.*

Il est clair que les bases $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ pour $(\mathbb{R}^2,.)$ $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ pour $(\mathbb{R}^3,.)$ sont des bases orthonormées.

Proposition 3. *Pour tout réel θ, la famille $\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.*

On a aussi une **Inégalité de Cauchy-Schwarz** qui est l'une des inégalités les plus utiles en algèbre et analyse :

Proposition 4. *Etant donnés deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$, on*

$$|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||||\vec{v}||.$$

Même preuve qu'en dimension 2.

Exercice 1. *Si $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ est une base orthonormée de $\vec{E}$ alors*

$$\vec{u}=\sum_{i=1}^{n} u_i\vec{e}_i \text{ avec } u_i=(\vec{u}.\vec{e}_i) \quad \vec{u}.\vec{v}=\sum_{i=1}^{n} u_iv_i \quad ||\vec{u}||^2=\sum_{i=1}^{n} u_iu_i$$

Remarque : attention cette propriété n'est plus valable avec une base non orthonormée. Dans la base $\vec{e}_1=\vec{\imath},\vec{e}_2=(1,1)$ qui n'est pas orthonormée puisque $\vec{e}_1.\vec{e}_2=1$, un vecteur

$$\vec{X}=(x,y)=(x-y)\vec{e}_1+y\vec{e}_2 \quad \text{alors que} \quad \vec{X}.\vec{e}_1=x.$$

1.2.2 Propriétés des fonctions vectorielles

Dans tout ce qui va suivre B= $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ désignera une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}=\mathbb{R}^n$ euclidien de dimension n. On notera $||\vec{u}||$ la norme d'un vecteur. En fait, nous utiliserons principalement $n=2$ ou $n=3$ mais c'est aussi simple de le faire avec n quelconque.

Définition 9. *On appelle application vectorielle toute application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\overrightarrow{E}$.*

Exemple : $\overrightarrow{F}(t)=t\vec{u}$ pour $\vec{u}$ vecteur fixé de $\overrightarrow{E}$.

Fonctions numériques associées à $\overrightarrow{F}$
Décomposons à chaque instant t, le vecteur $\overrightarrow{F}(t)$.

$$\overrightarrow{F}(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\vec{e}_i$$

Rappel : pour nous $n=2$ ou 3 mais on énonce avec n car cela ne change rien ...

Définition 10. *Les fonctions numériques f_i, définies de I dans $\mathbb{R}$, sont appelées les fonctions composantes de l'application $\overrightarrow{F}$ dans la base B.*

On pourra aussi considérer la norme du vecteur $\overrightarrow{F}(t)$ et définir une autre fonction numérique intéressante l'application N par : pour tout instant t, élément de l'intervalle I , $N(t) = ||\overrightarrow{F}(t)||$.

Définition 11. *On dit que la fonction $\overrightarrow{F}$ admet $\vec{w}$ comme limite en t_0 de I, si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel h suffisamment petit , de sorte que pour tout t satisfaisant $|t - t_0| < h$ on ait $||\overrightarrow{F}(t) - \vec{w}|| < \varepsilon$.*

La norme remplace la valeur absolue dans la définition vue sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 12. *Un fonction vectorielle est continue en un point t de I si et seulement si elle admet pour limite en ce point le vecteur $\overrightarrow{F}(t)$.*

EX : Si $\overrightarrow{F}(t) = t\vec{u}$ est continue en chaque valeur de t.

Définition 13. *La fonction $\overrightarrow{F}$ est dérivable en t_0 de l'intervalle ouvert I si et seulement si la fonction vectorielle $\vec{g}$ définie par $\vec{g}(h) = \dfrac{1}{h}\left[\overrightarrow{F}(t_0 + h) - \overrightarrow{F}(t_0)\right]$, pour tout $h \neq 0$ tel que $t_0 + h \in I$, admet une limite en t_0. Lorsque cette limite existe, elle est alors notée $\overrightarrow{F}'(t_0)$. Elle est dite dérivable sur I (ouvert) si elle est dérivable en tout t appartenant à I.*

EX : Si $\overrightarrow{F}(t) = t\vec{u}$, $\vec{g}(h) = \vec{u}$ donc $\overrightarrow{F}$ est dérivable en tout instant t de dérivée la fonction constante $\overrightarrow{F}'(t) = \vec{u}$.

Proposition 5.

1. *Une application $\overrightarrow{F}$ est continue en $t \in I$ si et seulement si chacune de ses composantes f_i est continue en t.*
2. *Une application $\overrightarrow{F}$ est dérivable en t de I si et seulement si chacune de ses composantes f_i est dérivable en t et alors le vecteur $\overrightarrow{F}'(t)$ se calcule par :*

$$\overrightarrow{F}'(t) = f_1'(t)\vec{e}_1 + f_2'(t)\vec{e}_2 + f_3'(t)\vec{e}_3 + \ldots + f_n'(t)\vec{e}_n \quad .$$

Preuve en dimension 3 par exemple pour la continuité C'est une conséquence du fait que

$$||\overrightarrow{F}(t) - \vec{w}||^2 = (f_1(t) - w_1)^2 + (f_2(t) - w_2)^2 + (f_3(t) - w_3)^2$$

et que donc

$$\text{Pour tout } i \in \{1, 2, 3\} \quad |f_i(t) - w_i| \leq ||\overrightarrow{F}(t) - \vec{w}||$$

.... On voit que tout se ramène à l'étude des fonctions composantes qui sont numériques et donc on sait faire. Donnons quelques exemples des plus utiles pour la suite :

Exercice 2. *Soient* $\overrightarrow{F}$ *et* $\vec{G}$ *deux fonctions vectorielles dérivables sur un intervalle* I *et* λ *une fonction scalaire dérivable de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Alors*

1) la fonction $\overrightarrow{F} + \lambda\overrightarrow{G}$ *est dérivable sur* I *et*

$$(\overrightarrow{F} + \lambda\overrightarrow{G})'(t) = \overrightarrow{F}'(t) + \lambda(t)\overrightarrow{G}'(t) + \lambda'(t)\overrightarrow{G}(t).$$

2) La fonction $g(t) =< \overrightarrow{F}(t), \vec{G}(t) >$ *est dérivable sur* I *et*

$$g'(t) =< \overrightarrow{F}'(t), \vec{G}(t) > + < \overrightarrow{F}(t), \overrightarrow{G}'(t) > .$$

3) La fonction $h(t) = \overrightarrow{F}(\lambda(t))$ *est dérivable sur* I *et de dérivée :*

$$h'(t) = \lambda'(t)\overrightarrow{F}'(\lambda(t)).$$

Ceci est simple il suffit de se ramener aux composantes des fonctions $\overrightarrow{F}$ et $\vec{G}$.

Définition 14. *Soit k un entier. Un fonction vectorielle est dite de classe* $\mathcal{C}^k$ *dans* I *si et seulement si toutes ses composantes sont de classe* $\mathcal{C}^k$ *dans* I.

Donnons une conséquence fondamentale de cette notion :

Théorème 2 (Formule de Taylor)**.** *Soit* $\overrightarrow{F}$ *un fonction vectorielle de classe* $\mathcal{C}^p$ *dans* I *et soit* h *un réel tel que* $[t, t+h] \subset I$. *Alors il existe une fonction vectorielle* $\overrightarrow{\varepsilon}$ *telle que :*

(1.1)
$$\overrightarrow{F}(t+h) = \overrightarrow{F}(t) + \sum_{1\leq k\leq p} \frac{h^k}{k!}\overrightarrow{F}(k)(t) + \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{\varepsilon}(h) \qquad \textit{avec } \overrightarrow{\varepsilon}(h) \to \vec{0} \textit{ quand } h \to 0.$$

D'après cette formule, le vecteur $\overrightarrow{F}'(t)$, lorsqu'il est non nul, dirige la tangente à la trajectoire. Dans le cas contraire, c'est $\overrightarrow{F}^{(k)}(t)$ où k est le premier entier pour lequel ce vecteur est non nul. On y reviendra plus en détail quand on construira des courbes

1.3 Espaces affines euclidiens

Définition 15. *On appelle espace affine* $\mathcal{E}$ *associé à l'espace vectoriel* $\vec{E}$, *un ensemble de points tel qu'à tout couple de points (A,B) on puisse associer un vecteur noté* $\overrightarrow{AB}$ *avec les propriétés suivantes :*

1. *Pour tous points* A *et* B, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
2. *Pour tous points* A, B *et* C, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ *(relation de Chasles).*
3. *Si* O *étant un point quelconque de* $\mathcal{E}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *un vecteur de* $\vec{E}$, *il existe un unique point* A *de* $\mathcal{E}$ *tel que* $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$.

Exemple : $\mathbb{R}^n$ est un espace affine associé à $\mathbb{R}^n$ (strange n'est ce pas). en effet si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux n-uplets On peut définir $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$ qui est bien un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et les propriétés ci-dessus sont satisfaites..... La propriété 3 de la définition dit qu'un espace affine est un espace vectoriel "accroché" à n'importe quel point de l'espace.

C'est intéressant car comme cela on pourra accrocher des vecteurs à un point M même si celui-ci bouge !

Définition 16. *Un repère de l'espace affine $\mathcal{E}$ est constitué d'un point quelconque O de $\mathcal{E}$ et d'une base quelconque de $\vec{E}$.*

Exemple : $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ pour l'espace et $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ pour le plan.

Définition 17. *Un espace affine $\mathcal{E}$ est euclidien s'il est associé à un espace vectoriel euclidien. A deux points A et B de $\mathcal{E}$, on peut alors associer un réel appelé distance entre A et B et noté $d(A, B)$ défini par : $d(A, B) = ||\vec{AB}||$.*

Exemple : l'espace ambiant ou encore espace physique peut être sans dommage assimilé à l' espace affine $\mathbb{R}^3$. Il est bien connu qu'un point M de $\mathbb{R}^3$ est déterminé par la donnée de ses coordonnées (x,y,z) dans un repère (orthonormé ou non) (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) définies par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et lorsque le repère est **orthonormé**, la distance entre deux points M_1 et M_2 est donnée par : $d(M_1, M_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$.

1.3.1 Notions d'orientation

Orientation du plan euclidien

On considère le plan affine euclidien $\mathcal{P} = (\mathbb{R}^2, .)$ où . le produit scalaire usuel rencontré ci-dessus.

Proposition 6. *Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, il existe exactement deux vecteurs $\vec{v}$ tels que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée. Il s'agit de $\vec{v} = -b\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$ et de son opposé.*

Preuve : On cherche les composantes x, y du vecteur $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Elles vérifient :

$$(1) ax + by = 0, \quad (2) x^2 + y^2 = 1.$$

Comme $\vec{u}$ est unitaire, $(a, b) \neq (0, 0)$ et on a que l'ensemble des solutions du système linéaire (1) , à une équation et deux inconnues, est $S = \{(x, y) = (-bt, at), t \in \mathbb{R}\} = \{t(-b, a), t \in \mathbb{R}\} = Vect((-b, a))$.

Mais nous cherchons des solutions de (1) qui vérifient aussi (2) .

On doit donc avoir $t^2||(-b, a)||^2 = 1$ c'est à dire $t^2 = 1$. D'où le résultat.

Définition 18. *Dans $\mathcal{P}$, orienté par $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on dit qu'une base orthonormée $(\vec{u},\vec{v})$ est directe si les vecteurs sont de la forme :*

$$\vec{u}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath} \quad et \quad \vec{v}=-b\vec{\imath}+a\vec{\jmath}.$$

Dans le cas contraire , on dira que la base est indirecte.

En fait on choisit cette définition pour que le déterminant $\det_B(\vec{u},\vec{v})$ ($B=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on met dans les colonnes les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans B) soit un nombre strictement positif. En effet :

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2+b^2=||\vec{u}||^2=1>0 \quad .$$

Ainsi le choix de la base B induit une orientation du plan $\mathcal{P}$. Le sens direct correspond à deuxième vecteur de base obtenu par rotation du premier **dans le sens inverse des aiguilles d'une montre**.

Une fois choisie l'orientation, on peut parler d'angle orienté :

Définition 19. *Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ de $\mathbb{R}^2$unitaires, si on désigne par $\vec{v}_1$ le vecteur normé tel que $(\vec{u}_1,\vec{v}_1)$ soit une b.o.d., on appelle mesure de l'angle orienté des vecteurs $(\widehat{\vec{u}_1,\vec{u}_2})$ tout réel tel que :*

$$\vec{u}_2=\cos\theta\vec{u}_1+\sin\theta\vec{v}_1.$$

θ est appelée mesure de l'angle des vecteurs $(\widehat{\vec{u}_1,\vec{u}_2})$.

Dans le théorème, θ est une mesure de l'angle orienté des vecteurs $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$.

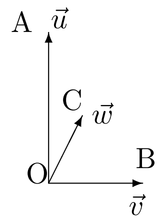
Et si $\vec{u}=\vec{u}_\theta$ alors le vecteur unitaire $\vec{v}$ tel que $(\vec{u},\vec{v})$ soit directe est $\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$!

Orientation de l'espace ambiant

Pour tout le reste du cours (sauf mention inverse) $\mathcal{E}$ désignera donc un espace affine euclidien associé à un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Autrement dit ; $\mathcal{E}=\mathbb{R}^3$

On va prolonger la notion vue en dimension 2. Le lecteur assidu pourra, à titre d'exercices, énoncer les résultats qui se généralisent en dimension n quelconque et détecter ceux qui ne peuvent pas. Voici l'énoncé d'une règle connue sous le nom de règle d'Ampère ou de règle du tire-bouchon ou des trois doigts de la main droite :

Définition 20. *Trois vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment avec un point O un repère direct de $\mathcal{E}$ si un observateur placé sur $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, les pieds en O et regardant vers $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ voit $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$ sur sa gauche. Si $\overrightarrow{OC}$ est à droite , le repère est dit inverse ou indirect.*



De facon plus mathématique, nous laisserons au lecteur le soin de justifier la proposition suivante (qui sera reprise dans le cours d'algèbre) :

Proposition 7. *Etant donné deux bases $B = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_3)$ et $B' = (\vec{f}_1, ..., \vec{f}_3)$ la relation*
$B\mathcal{R}B' \iff det_{B'}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) > 0$ est une relation d'équivalence pour laquelle il y a deux classes.

Définition 21. *Orienter l'espace vectoriel $\vec{E}$, c'est choisir, en se donnant une base dite directe, une des deux orientations possibles. En dimension* 3*, les bases satisfaisant la règle d'Ampère sont toutes directes.*

Remarques :

1. La matrice de passage P de la base B à une base B' de même orientation a donc un déterminant strictement positif. Lorsque B et B' sont en plus orthonormées et de même orientation, ce déterminant vaut $+1$(cf $n = 2$).
2. On cherchera toujours à utiliser des repères directs. Lorsqu'on utilisera plusieurs repères, on prendra soin de regarder s'ils sont tous de même orientation .

1.4 Back to cinématique

Définition 22. *Un référentiel $\mathcal{R}$ est constitué d'un repère de l'espace usuellement noté $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et d'une horloge.*

Définition 23. *Soit un point M de coordonnées (x, y, z) dans un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace $\mathcal{E}$. On dit que le point M est mobile (ou en mouvement) par rapport à $\mathcal{R}$ si au moins une de ses cordonnées varie avec le temps. Dans le cas contraire, M est dit immobile dans $\mathcal{R}$ (ou encore lié à $\mathcal{R}$).*

Pour déterminer la position d'un point qui maintenant sera supposé a priori mobile, il suffit donc de se donner à chaque instant sa position $M(t)$ i.e. de se donner une fonction $\overrightarrow{F}$ définie d'un intervalle $I = [t_0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\overrightarrow{E} \sim \mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$ si le mouvement a lieu dans le plan) par : $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F}(t)$.

Définition 24. *Le vecteur* $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F}(t)$ *est appelé vecteur position . Le réel* t_0 *s'appelle l'instant initial. L'ensemble des positions* $M(t)$ *de M lorsque le temps varie s'appelle la trajectoire de M.*

Quelques remarques

- un point M est immobile en M_0 dans $\mathcal{R} \iff$ pour tout instant t, $\overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{OM_0}$.
- L'immobilité est une notion qui étroitement liée au référentiel : en effet, un voyageur dans un train assis dans son fauteuil sera immobile par rapport à tout repère lié au train et il aura l'impression que ce sont les poteaux qui bougent alors que ... Mais pour le moment le référentiel est supposé fixe !

La donnée d'un couple $(\mathrm{I}, \overrightarrow{F})$ formé d'un intervalle I et d'une fonction vectorielle définit un arc paramétré par le temps dont $\overrightarrow{F}$ est le paramétrage. Tracer la trajectoire d'un point mobile c'est construire une courbe paramétrée a priori par le temps. MAis comme on le verra , il y a pour une même courbe plusieurs paramétrages possibles, certains seront plus adaptés pour certains calculs et pas pour d'autres ...

Comme on le voit, la position de M est déterminée par une fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ ce qui conduit à s'intéresser aux différentes propriétés de celles-ci. Mais bien sûr si on change de repère on change de fonction vectorielle bien que la position à l'instant t du point matériel $M(t)$, elle, ne change pas ! ! ! ! !

1.4.1 Vecteur vitesse d'un point matériel

Pour toute la cinématique (mécanique classique), on supposera, une fois pour toute, que la position du point M est une fonction très régulière du temps c'est à dire que $\overrightarrow{F}$ est au moins de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Définition 25. *La vitesse, à l'instant t du point M, relativement au repère* $\mathcal{R}$ *est la dérivée du vecteur position, i.e. le vecteur* $\overrightarrow{F}'(t)$*. On la note :* $\overrightarrow{V}(M)$ *ou mieux* $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$*.*

La deuxième notation sera surtout employée dès que l'on aura plusieurs repères en présence. Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on lui pourra utiliser la première. Remarque : les physiciens ont l'habitude d'utiliser la notation :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \Big[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big]_{\mathcal{R}}$$

D'après la formule de Taylor, le **vecteur vitesse, quand il est non nul, est donc tangent à la trajectoire en tout point**. Les points pour lesquels le vecteur vitesse s'annule sont dit **stationnaires**.

Conséquence : Un point M est immobile dans $\mathcal{R} \iff$ à chaque instant t , $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$.

Regardons maintenant l'expression de cette vitesse dans les différents systèmes de coordonnées que nous possédons.

Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

D'après le paragraphe précédent, on sait que :

$$\overrightarrow{F}'(t) = f_1'(t)\vec{e}_1 + f_2'(t)\vec{e}_2 + f_3'(t)\vec{e}_3 \quad .$$

Donc si $x(t), y(t)$ et $z(t)$ désignent les trois coordonnées de la position M(t) dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on obtient :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k}$$

Si la base choisie est orthonormée, le module de la vitesse se calcule donc par :

$$||\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}||^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2$$

Enonons à présent un résultat très simple mais utile pour étudier les mouvements dans l'espace.

Théorème 3. *Le vecteur vitesse relativement à $\mathcal{R}$ de la projection d'un point M parallèlement à un plan de $\mathcal{R}$ (ou à une droite) est égale à la projection parallèlement à ce plan de $\mathcal{R}$ (ou à cette droite) du vecteur vitesse du point M.*

Pour la démonstration, il suffit de regarder coordonnées à coordonnées. C'est l'exercice 2.

Donc pour un point du plan : D'après ce que l'on a vu précédemment , si $x(t)$ et $y(t)$ désignent l'abscisse et l'ordonnée de la position $M(t)$ dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on obtient :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath}.$$

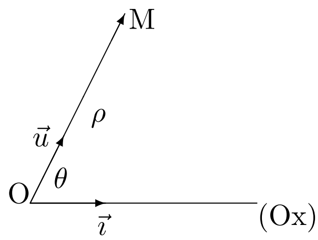
Comme la base choisie est orthonormée, le module de la vitesse se calcule donc par :

$$||\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}||^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2$$

Coordonnées polaires pour un point du plan $\mathcal{P}$

Pour un point mobile du plan, il existe un autre système de coordonnées que les coordonnées cartésiennes

Définition 26. *On appelle système de coordonnées polaire d'un point M du plan $\mathcal{P}$ euclidien tout couple (ρ, θ), tel que : $\overrightarrow{OM} = \rho(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$.*



Pour en construire un, il suffit de considérer un vecteur directeur unitaire $\vec{u}$ de la droite (OM) (O est l'origine du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$) . Pour que $\vec{u}$ soit bien défini, il faut bien sûr que $M \neq O$. Alors, il existe un réel ρ tel que : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$. Et par définition, $\vec{u}$ étant un vecteur unitaire et l'espace étant orienté, on peut définir l'angle orienté $\widehat{(\vec{\imath}, \vec{u})}$ et une de ses mesures θ de sorte que $\vec{u} = \vec{u}_\theta$. Le couple ainsi formé (ρ, θ) est un système de coordonnées polaires du point M. On remarque facilement qu'alors $(-\rho, \theta + \pi)$ est un autre système de coordonnées polaires du point M.

Remarque : le point O est caractérisé par $\rho = 0$. Dans ce cas là, θ n'est pas défini.

Correspondance entre les deux systèmes

On a bien évidemment

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta$$

En un point qui n'est pas de coordonnées de la forme$(x, 0)$ avec $x \leq 0$, on prendra ρ positif et $\theta \in]-\pi, \pi[$:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = 2 \arctan\big(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\big)$$

Remarque (perfide ?) : pour θ, c'est l'expression de l'argument du nombre complexe $x + iy$......

En effet :$x + \sqrt{x^2 + y^2} = \rho(1 + \cos\theta) = 2\rho\cos^2\frac{\theta}{2}$ et $y = 2\rho\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$. D'où l'expression....

Repère polaire

Définition 27. *Soit $\vec{v}_\theta$ le vecteur orthogonal à $\vec{u}_\theta$ tel que le repère $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ soit direct. Le repère $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta))$ est appelé repère polaire associé au point M. Il est parfois noté $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.*

Attention ce repère sera amené à bouger dès que le point M sera mobile !!!!!!!

1.4.2 Expression de la vitesse en coordonnées polaires pour un mouvement plan

Trouvons d'abord l'expression de la fonction vectorielle qui détermine la position de M. On se donne un système $(\rho(t), \theta(t))$ de coordonnées polaires de la position M(t).

Et alors :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)\vec{u}(\theta(t)) = \rho(t)\vec{u}_{\theta(t)} = \overrightarrow{F}(t)$$

. Rappelons nous l'exercice (2) : calculons la dérivée de l'application $\overrightarrow{H}$ qui à t associe le vecteur $\vec{u}(\theta(t)) = \vec{u}_{\theta(t)}$:

$$\overrightarrow{H}'(t) = \theta'(t)(-\sin\theta(t)\vec{\imath} + \cos\theta(t)\vec{\jmath}) = \theta'(t)\overrightarrow{U}'(\theta(t))$$

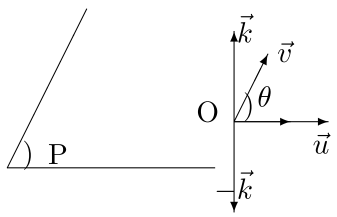
où $\overrightarrow{U}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} = \vec{u}_\theta$ (composée de deux applications). D'après la formule écrite plus haut, on obtient :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \rho'(t)\vec{u} + \rho(t)\theta'(t)\vec{v} = \rho'(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)\theta'(t)\vec{e}_\theta.$$

1.4.3 Systèmes de coordonnées dans l'espace

L'espace affine $\mathcal{E}$ est orienté par la convention usuelle. Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$.

1. **Orientation induite par un vecteur**



   La donnée d'un vecteur $\vec{k}$ induit une orientation sur le plan vectoriel orthogonal à $\vec{k}$. En effet, on choisira de prendre pour directe les bases $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan telles que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ soit une base directe de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. Si $\vec{k}$ est changé en $-\vec{k}$, l'orientation est inversée sur le plan (cf figure cidessus). Par conséquent, pour déterminer un angle, il faudra à chaque fois préciser "orienté par tel vecteur" (Pour une définition plus correcte, on renvoie au cours d'algèbre (Rotations)).

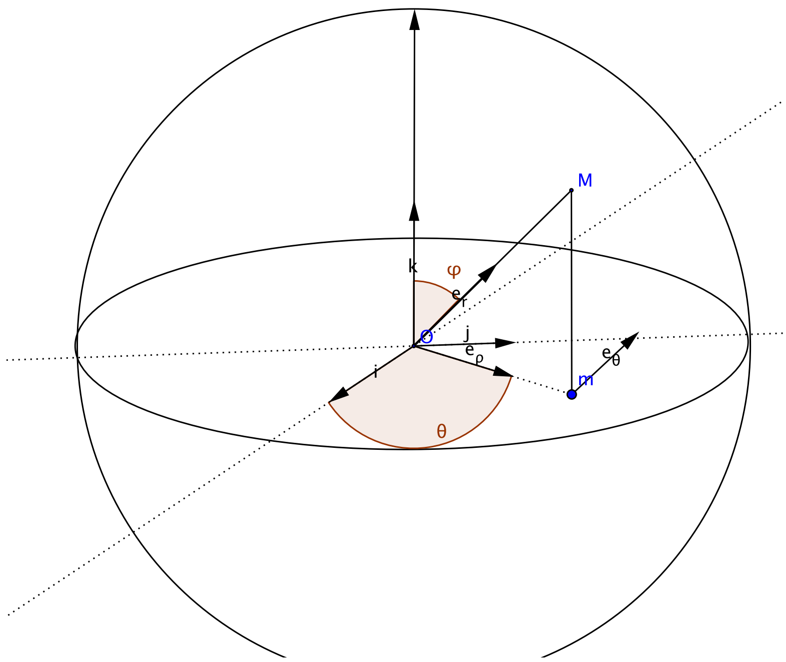
2. **Coordonnées cartésiennes** Le point M est déterminé par le triplet (x,y,z) de ses coordonnées dans le repère ci-dessus.

3. **Repère cylindrique** Appelons m la projection de M sur le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit (ρ, θ) un système de coordonnées polaires de m dans ce plan.

Définition 28. *Le triplet (ρ, θ, z) constitue le système de coordonnées cylindriques du point M. Le repère (O,$\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}$) est appelé repère cylindrique associé au point M.*

Remarque :
- L'angle θ est l'angle des vecteurs $\vec{\imath}, \overrightarrow{Om}$ orienté par (ou autour de) $\vec{k}$.
- On notera aussi parfois (O,$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k}$) le repère cylindrique. Ce repère sera d'autant plus adapté que le point matériel aura tendance à se déplacer sur un cylindre d'axe (OZ). Attention, l'équation cartésienne d'un cylindre infini à base circulaire de rayon r est bien sûr : $x^2+y^2 = r^2$.

4. **Repère sphérique**



Comme nôtre bonne vieille terre est, dans une bonne approximation, sphérique, un point matériel bougeant sur la surface de la terre pourra être repéré par ses coordonnées sphériques. Nous attirons cependant l'attention sur le fait qu'à moins d'être en pleine mer, on détermine rarement dans la vie courante la position d'un quelconque objet en précisant sa latitude sa longitude et son altitude.

Une sphère, de rayon r, est un ensemble de points de $\mathcal{E}$ satisfaisant $r^2 = d(O, M)^2$; l'équation cartésienne, dans une base orthonormée, est donc : $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Soit encore avec les notations précédentes : $d(O, m)^2 + z^2 = r^2$. Si on pose $z = r\cos\varphi$ et $\overline{Om} = r\sin\varphi$, on obtient un paramétrage de la sphère :

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad \varphi \in [0, \pi] \begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$

Définition 29. *L'angle φ , orienté par $_\theta, s'appellelacolatitudeetl'angle\theta$ la longitude(ou azimut). Le triplet (r, θ, φ) constitue le système de coordonnées sphériques d'un point M.*

Ainsi :

$$O\vec{M} = r\vec{e_r} \quad \text{où } \vec{e_r} = \left| \begin{array}{c} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi \end{array} \right.$$

Pour déterminer un repère, il faut compléter par des vecteurs tangents à la sphère. Comme on le verra par la suite, on peut choisir :

$$\vec{e}_\varphi = \left| \begin{array}{c} \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi \end{array} \right. \qquad \vec{e}_\theta = \left| \begin{array}{c} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

Définition 30. *Le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ est orthonormé direct. On l'appelle repère sphérique associé au point M.*

1.4.4 Vitesse d'un point de l'espace ambiant

Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

Déjà vu

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k}$$

Expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

Comme la fonction position $\overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{Om}(t) + z(t)\vec{k}$, l'exercice (2) nous dit que si (ρ, θ) un système de coordonnées polaires de m dans ce plan l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques est :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \rho'(t)\vec{u} + \rho\theta'(t)\vec{v} + z'(t)\vec{k} = \rho'(t)\vec{e}_\rho + \rho(t)\theta'(t)\vec{e}_\theta + z'(t)\vec{k}$$

1.4.5 Vecteur accélération d'un point matériel

Définition 31. *Le vecteur accélération d'un point matériel M, relativement au repère $\mathcal{R}$, à l'instant t est le vecteur $\overrightarrow{F}''(t)$ où $\overrightarrow{F}$ définit la position de M, on le notera $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R})$ ou si il n'y a pas d'autre repère, $\vec{\Gamma}(M)$.*

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = \left[\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right]_\mathcal{R} = \left[\frac{d^2O\vec{M}}{d^2t}\right]_\mathcal{R}$$

Expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques

Exercice 3. *Déterminer l'expression de la vitesse dans le repère sphérique en utilisant l'exercice (2) et en s'inspirant de ce qui a été fait pour trouver la vitesse en coordonnées polaires.*

Expression du vecteur accélération en cartésiennes

C'est clairement :

$$\overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = x''(t)\vec{e}_1 + y''(t)\vec{e}_2 + z''(t)\vec{e}_3.$$

On peut aussi énoncer un théorème de projections :

Théorème 4. *Le vecteur accélération relativement à $\mathcal{R}$ de la projection d'un point M parallèlement à un plan de $\mathcal{R}$ (ou à une droite) est égale à la projection parallèlement à ce plan de $\mathcal{R}$ (ou à cette droite) du vecteur accélération du point M.*

La preuve est laissée au lecteur.

Expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques

On reprend l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \rho'(t)\vec{u} + \rho(t)\theta'(t)\vec{v} + z'(t)\vec{k}.$$

et on applique les règles de dérivation vues au paragraphe précédent pour trouver :

$$\overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = (\rho''(t)-\rho(\theta'(t))^2)\vec{u}+(\rho\theta''(t)+2\rho'(t)\theta'(t))\vec{v}+z'(t)\vec{k} = (\rho''(t)-\rho(\theta'(t))^2)\vec{e}_\rho+(\rho\theta''(t)+2\rho'$$

Si m désigne la projection de M sur O$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on a en vertu du théorème de projection :

$$\overrightarrow{\Gamma}(m) = \underbrace{(\rho''(t) - \rho(\theta'(t))^2)\vec{e}_\rho}_{\overrightarrow{\Gamma}_R} + \underbrace{(\rho\theta''(t) + 2\rho'(t)\theta'(t))\vec{e}_\theta}_{\overrightarrow{\Gamma}_T}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\Gamma}_R$ s'appelle l'accélération radiale et le vecteur $\overrightarrow{\Gamma}_T$ l'accélération transverse ou orthoradiale.

Expression du vecteur accélération en coordonnées sphériques

Trouver l'expression demandée est un excellent exercice!!!!!

1.4.6 Produit mixte de trois vecteurs

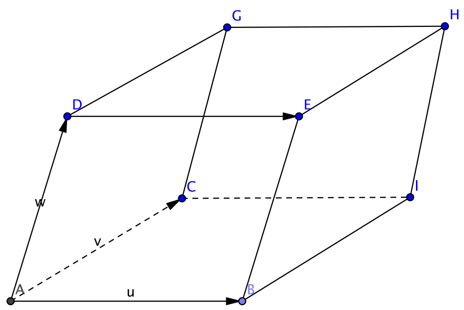
Dans tout ce qui suit $\vec{E}$ désigne un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe.

Définition 32. *Le produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le réel, noté $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.*

Rassemblons les propriétés qui nous serviront essentiellement par la suite (voir le cours d'algèbre).

Propriété (1) Le produit mixte est indépendant de la base orthonormée **directe** choisie : en effet si B et B' sont deux bases orthonormées directes, le déterminant de la matrice de passage de B à B' vaut $+1$.

Propriété (2) Le volume du parallelépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ est égal à la valeur absolue du produit mixte de ces trois vecteurs.



Propriété (3) Pour toute permutation σ, de signature $\varepsilon(\sigma)$:

$$(\vec{u}_{\sigma(1)}, \vec{u}_{\sigma(2)}, \vec{u}_{\sigma(3)}) = \varepsilon(\sigma)(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$$

(revoir les propriétés du déterminant).

1.4.7 Produit vectoriel

Etant donné deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{E}$ et vu la définition du produit mixte ci-dessus, l'application $\vec{w} \to (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ est une forme linéaire sur $\vec{E}$ ie une application linéaire de $\vec{E}$ dans $\mathbb{R}$.On démontre alors qu'il existe un unique vecteur $\vec{p}$ tel que :$(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \vec{w}.\vec{p}$ ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 33. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E} = \mathbb{R}^3$ de composantes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans une base* **orthonormée directe B**. *On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le vecteur de composantes dans* **B** *: $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$. C'est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout vecteur $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$,*

$$\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} \quad .$$

Exercice 4. *Démontrer que la formule ci-dessus est bien exacte.*

Examinons les différentes propriétés de ce produit vectoriel :

Proposition 8. *Pour deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\vec{E}$*

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
2. $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\vec{u} \wedge \vec{w}$
3. *le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal au plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$: en particulier $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{v} = 0$*
4. *$\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants et alors la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est une base* **directe** *de $\vec{E}$.*
5. $||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$

A titre d'exercice , on pourra vérifier que

Exercice 5. *L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut : $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$.*

Remarque :

1. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dépend donc de la convention choisie. Dans certains ouvrages de mécanique de tels vecteurs sont appelés axiaux ou même pseudo-vecteurs par opposition aux vecteurs dits intrinséques qui ne dépendent pas de l' orientation choisie.
2. A norme égale, on obtient la plus grande des normes de $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ lorsque les vecteurs sont orthogonaux.

Les preuves sont laissées en exercice.
A retenir On retrouve les composantes dans une base orthonormée directe $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ grâce à :

$$\begin{vmatrix} x_1 & u_1 & v_1 \\ x_2 & u_2 & v_2 \\ x_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{x}.(\vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ si } \vec{x} = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \vec{e}_i. \quad (\vec{u} \wedge \vec{v})_1 = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots$$

1.4.8 Double produit vectoriel

Dans de nombreuses occasions, il nous faudra calculer des produits vectoriels imbriqués les uns dans les autres. Aussi est-il utile d'identifier le vecteur $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. D'après les propriétés vues précédemment, ce vecteur est dans le plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Avec un peu de courage, on arrive à montrer :

Exercice 6. *Pour tout triplet $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de vecteurs de $\vec{E}$:*

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w} \tag{1.2}$$

1.4.9 Division vectorielle (Exercice)

Nous allons maintenant répondre à une question simple : étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) de $\vec{E}$, quand peut-on diviser vectoriellement $\vec{u}$ par $\vec{v}$? Autrement dit, on cherche à résoudre sur $\vec{E}$ l'équation :

$$\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{u} \quad \text{pour } \vec{v} \neq \vec{0} \tag{1.3}$$

1. Si $\vec{v}.\vec{u} \neq 0$, il n'y a pas de solution.
2. Si $\vec{v}.\vec{u} = 0$, considérons la base de $\vec{E}$ suivante : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$. D'après la propriété (3) de la proposition (8) le vecteur x sera nécessairement orthogonal à $\vec{u}$ donc dans la plan $(\vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$. De plus si $\vec{x}_0$ est solution du problème, alors $\vec{x}_0 + t\vec{v}$ est aussi solution quelle soit la valeur du réel t. Cherchons alors une solution particulière $\vec{x}_0$ colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Si $\vec{x}_0 = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$, utilisons la formule du double produit vectoriel (1.2) (déjà ?) et nous obtenons : $\vec{v} \wedge \vec{x}_0 = \lambda(\vec{v}.\vec{v})\vec{u}$ ce qui donne immédiatement $\lambda = \frac{1}{(\vec{v}.\vec{v})}$

L'ensemble des solutions de (1.3) est donc :

1. Si $\vec{v}.\vec{u} \neq 0$, il n'y a pas de solution.
2. Si $\vec{v}.\vec{u} = 0$, $\vec{x} = \frac{1}{(\vec{v}.\vec{v})}\vec{u} \wedge \vec{v} + t\vec{v}$ pour tout t réel.

Bibliographie

[1] Deschamps & Warusfel, Mathématiques Tout en Un, Première année , Dunod, 2003.

[2] Lelong-Ferrand & Arnaudiès, , Cours de Mathématiques Tome 3 Géométrie et Cinématique , Dunod, Paris, 2003

[3] D. Guinin, F. Aubonnet & Bernard Joppin Précis de mathématiques. Cours. Exercices résolus. Tome 5. Géométrie Classes préparatoires. Premier cycle universitaire. Bréal, 1994