Université de Tours — Année 2012-2013

# L2. Courbes paramétrées
# Examen de mai 2013 (2ème session)

L'usage de toute calculatrice est interdit.

## EXERCICE 1

On considère la courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définie paramétriquement par

$$x = f(t) = t^3 + t^2 - t - 1,$$
$$y = g(t) = 3t^2 + 2t + 1,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1°) Faire un tableau de variations complet, où l'on portera les valeurs de $t$ suivantes: $-1, -1/3, 1/3$, et 1, en précisant les valeurs en chacun des points, et les limites de $f$ et $g$ aux extrémités.

3°) 0n note $A = M(-1)$, $B = M(-1/3)$, $E = M(1/3)$, $F = M(1)$ les points correspondants de $\mathcal{C}$. Pour chacun d'eux, déterminer la tangente et la position par rapport à la tangente à l'aide du tableau de variations.

4°) Etudier les branches infinies

5°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

# EXERCICE 2

On considère la courbe $\mathcal{G}$ définie par l'équation polaire

$$\rho = \varphi(\theta) = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

1°) Réduire l'intervalle d'étude, en expliquant quelles transformations permettent d'obtenir toute la courbe à partir de l'intervalle réduit $]0, +\pi]$ et dresser un tableau de variations sur cet intervalle.

2°) Montrer que quand $\theta \longrightarrow 0$, la courbe $\mathcal{G}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$, qu'on déterminera. Montrer que quand $\theta \longrightarrow \pi$, la courbe est au dessous de $\mathcal{D}$.

3°) a) Trouver la tangente au point relatif à $\theta_1 = \pi/2$, dans le nouveau repère (on ne demande pas la position par rapport à la tangente)

b) Trouver la tangente au point relatif à $\theta_2 = \pi$, dans le nouveau repère, et la position par rapport à la tangente.

4°) Effectuer le tracé complet de la courbe.

N.B. On rappelle les formules

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u, \qquad \sin 2u = 2 \sin u \cos u.$$

# EXERCICE 3

On considère la courbe paramétrée $\Gamma$ définie par

$$x = f(t) = \cos^3 t$$
$$y = g(t) = \sin^3 t$$

pour $t \in [-\pi, \pi]$ .

1°) Calculer la longueur de la courbe $\Gamma$.

2°) Calculer la longueur de la portion de courbe $\Gamma_1$ relative à $[0, \pi/2]$ et retrouver le résultat précédent en utilisant les symétries de la courbe $\Gamma$.