L2. Courbes paramétrées
Examen du 18 décembre (1ère session)

L'usage de toute calculatrice est interdit.

EXERCICE 1

On considère la courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définie paramétriquement par

$$x = f(t) = \sin^3 t,$$
$$y = g(t) = \cos t - 2\cos^4 t,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1°) On appelle $\mathcal{C}_1$ la portion de $\mathcal{C}$ obtenue pour $t \in [0, \pi]$; expliquer comment on obtient toute la courbe $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{C}_1$.

2°) Faire un tableau de variations sur $[0, \pi]$, faisant intervenir deux autres valeurs de t, en précisant les valeurs, ou les limites de f et g en chacun des points.

3°) a) Montrer qu'il existe $t_1 \in]0, \pi[$, quon déterminera, tel que la tangente au point $M(t_1)$ est parallèle à $0x$, et déterminer la position par rapport à la tangente, à l'aide du tableau de variations.

b) Montrer qu'il existe $t_2 \in]0, \pi[$, qu'on déterminera, tel que la tangente au point $M(t_2)$ est parallèle à $0y$, et déterminer également la position par rapport à la tangente.

4°) (question bonus)

a) Peut-on trouver directement la tangente au point $M(0)$? Calculer la pente de la droite $M(0)M(t)$ et montrer qu'elle tend vers l'infini quand $t \to 0$ (on utilisera un développement limité). Que peut-on en déduire pour la tangente en $M(0)$?

b) Faire la même étude en $M(\pi)$ et montrer qu'on a la même conclusion.

5°) Tracer la courbe $\mathcal{C}_1$, puis la courbe $\mathcal{C}$.

EXERCICE 2

On considère la courbe Γ définie par l'équation polaire

$$\rho = \varphi(\theta) = \frac{\cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

1°) Montrer qu'il suffit d'étudier la portion de courbe Γ_1 relative à l'ensemble d'étude $D = [0, \pi/4[\cup]\pi/4, \pi]$ et expliquer comment on obtient ensuite toute la courbe Γ.

2°) Faire un tableau de variations sur D, en précisant les valeurs, ou les limites de φ en chacun des points.

3°) a) Montrer que quand $\theta \longrightarrow \pi/4$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{A}$ qu'on dessinera dans le nouveau repère.

b) On pose $\theta = \pi/4 + h$. Montrer que quand $h \longrightarrow 0$ avec $h < 0$ la courbe est au dessous de $\mathcal{A}$, et $\varphi(\theta) > 0$. Montrer quand $h \longrightarrow 0$ avec $h < 0$, la courbe est au dessus de $\mathcal{A}$, et $\varphi(\theta) < 0$.

4°) Trouver la tangente et la position par rapport à la tangente au point relatif à $\theta_0 = 0$.

5°) Vérifier que Γ_1 passe par 0 et trouver la tangente en ce point.

6°) Tracer la courbe Γ_1, puis la courbe Γ.

N.B. On rappelle les formules, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

EXERCICE 3

On considère la courbe implicite définie par

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, (x^2+y^2)(x-y)^2 - x^2 = 0\right\}.$$

1°) Vérifier que le point $(x_0, y_0) = (1, 0)$ appartient à C, et calculer l'équation de la tangente au point.

2°) (question bonus)
a) Trouver une représentation polaire de la courbe C.

b) Comparer C avec la courbe Γ de l'exercice 2. Retrouver alors la tangente obtenue à la question 4 de l'exercice 2.