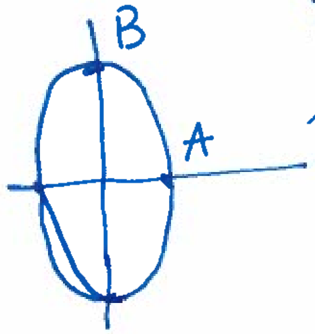
<u>Exercice 5</u>



$b > a > 0$ Arc $([0, 2\pi], f)$ $f(t) = (a\cos t, b\sin t)$

f est une ellipse de demi-grand axe b, demi petit axe a.

1) $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$ $\qquad f'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

comme $|\sin t| \leq 1$ et $|\cos t| \leq 1$ et que $b > a > 0$

$a^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \leq a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \leq b^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = b^2 \quad (*)$

donc $\qquad a(2\pi) \leq \ell \leq b(2\pi)$

Ces intégrales s'appellent des intégrales elliptiques et on ne sait pas donner des valeurs exactes.

2) $f'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

$f''(t) = (-a\cos t, -b\sin t) = -f(t)$

$\det(f'(t), f''(t)) = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{vmatrix} = ab = \|f'(t)\|^3 \gamma(t)$

donc $\gamma(t) = \dfrac{ab}{\|f'(t)\|^2}$. Comme f est C^∞, γ continue

et $\exists t_0 / \gamma(t_0) = \max\limits_{t \in [0, 2\pi]} \gamma(t)$ $\quad$ ($[0, 2\pi]$ compact)

Donc $\gamma(t_0) = \dfrac{ab}{\min\limits_{t \in [0, 2\pi]} \|f'(t)\|^2}$ $\quad$ or d'après $(*)$ $\min\limits_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|^2 = a^{3/2}$ $\quad (t_0 = \frac{\pi}{2})$

Donc $\boxed{\gamma(\pi/2) = \dfrac{b}{\sqrt{a}}}$ est le max demandé, c'est la courbure au point B

Et on voit de même que $\boxed{\min\limits_{t \in [0, \pi]} \gamma(t) = \gamma(0) = \dfrac{a}{\sqrt{b}}}$

Et on vérifie que $R_B = \dfrac{1}{\gamma(\pi/2)} \ll R_A = \dfrac{1}{\gamma(0)}$