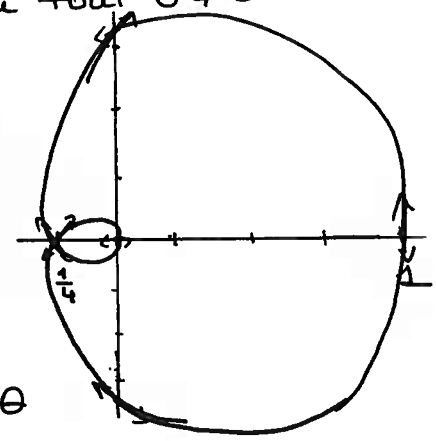
Exercice 2 Γ : $\rho = \left(\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)^4$ $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$

1) Les éventuels points stationnaires sont les $M(\theta)$ / $\rho(\theta)=0$ i.e. les $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$ / $\sin\frac{\theta}{4}=0$
i.e. les $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$ / $\frac{\theta}{4} = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ i.e. $\theta = 0$
Comme $\vec{F}'(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{4}\right)^3 \left[\cos\frac{\theta}{4}\vec{e}_\rho + \sin\frac{\theta}{4}\vec{e}_\theta\right]$ puisque $\vec{F}(\theta) = \sin^4\frac{\theta}{4}\,\vec{e}_\rho$
Le point $M(\theta=0)$ est bien stationnaire.

2) On peut réduire le domaine d'étude car $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, on fait l'étude sur $[0, 2\pi]$ et on fera une symétrie / (Ox).
D'après la formule ci-dessus, $\vec{F}'(\theta) = \sin\left(\frac{\theta}{4}\right)^3 \vec{\tau}$ et $\widehat{\vec{e}_\rho, \vec{\tau}} = \frac{\theta}{4}$
ou encore $\tan V = \tan\frac{\theta}{4}$ donc $V = \frac{\theta}{4}$ pour tout $\theta \neq 0$.

	0		π		2π
ρ'			+		
ρ	0		$\frac{1}{4}$ ↗		1
$\tan V$	?				$+\infty$

ALLURE GENERALE



3) $\vec{\tau} = \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\vec{e}_\rho + \sin\left(\frac{\theta}{4}\right)\vec{e}_\theta$
$\vec{n} = -\sin\frac{\theta}{4}\vec{e}_\rho + \cos\frac{\theta}{4}\vec{e}_\theta$
Donc si $\alpha = \widehat{(\vec{\imath}, \vec{\tau})}$ $\alpha = \theta + V = \frac{5\theta}{4}$ et $d\alpha = \frac{5}{4}d\theta$

4) Si on oriente les abscisses curvilignes dans le sens des $\theta \nearrow$ (comme en cours)
Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ $\frac{ds}{d\theta} = \|\vec{F}'(\theta)\| = \left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^3$ et $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta}\frac{1}{\frac{d\alpha}{d\theta}} = \frac{4}{5}\left(\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)^3$
Le centre de courbure C associé à $M(\theta)$ vérifie
$\vec{MC} = R.\vec{n} = R\left[-\sin\frac{\theta}{4}\vec{e}_\rho + \cos\frac{\theta}{4}\vec{e}_\theta\right]$
Donc $\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{MC} = \left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^4\vec{e}_\rho + \frac{4}{5}\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)^3\left[-\sin\frac{\theta}{4}\vec{e}_\rho + \cos\frac{\theta}{4}\vec{e}_\theta\right]$
Dans le repère polaire $\boxed{\vec{OC} = \frac{1}{5}\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^4\vec{e}_\rho + \frac{4}{5}\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^3\cos\frac{\theta}{4}\vec{e}_\theta}$ soit en revenant au
repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $\boxed{\vec{OC} = \frac{\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^3}{5}\left[\left(\sin\frac{\theta}{4}\cos\theta - 4\sin\theta\cos\frac{\theta}{4}\right)\vec{\imath} + \left(\sin\frac{\theta}{4}\sin\theta + 4\cos\frac{\theta}{4}\cos\theta\right)\vec{\jmath}\right]}$

5) Le point P projection de C sur (OM) vérifie $\vec{MP} = (\vec{MC}\cdot\vec{e}_\rho)\vec{e}_\rho = -R\sin\frac{\theta}{4}\vec{e}_\rho$
$\vec{MP} = -\frac{4}{5}\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^4\vec{e}_\rho$ et donc $\vec{OP} = \frac{1}{5}\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)^4\vec{e}_\rho$
Donc la courbe que décrit P est obtenue comme l'image de Γ par une homothétie de centre O et de rapport $1/5$.

Exercice 3 : 1) La courbe est une spirale, tracée en cours (et en TD).
2) On sait que $\vec{V}(M) = \rho'\vec{e}_\rho + \rho\theta'\vec{e}_\theta$ $\vec{\Gamma}(M) = (\rho'' - \rho\theta'^2)\vec{e}_\rho + 2\rho'\theta'\vec{e}_\theta$
comme $\rho(t) = e^{\theta(t)}$, $\rho'(t) = f'(t)\rho(t)$ $\theta'(t) = f'(t)$
$\vec{V}(M) = \rho(t)f'(t)\,(\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta)$ $\vec{\Gamma}(M) = \rho f'(t)^2(\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta) + \rho f''(t)(\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta) + \rho f'(t)^2\left[\vec{e}_\theta - \vec{e}_\rho\right]$
$\vec{\Gamma}(M) = \rho f''(t)\vec{e}_\rho + \rho\left[f''(t) + 2f'(t)^2\right]\vec{e}_\theta$
3) On a un mouvement uniforme $\iff \rho(t)f'(t) = cste = c \iff e^{f(t)} - e^{f(0)} = ct$
$\iff e^{f(t)} = d + ct$
$\iff f(t) = \ln(d + ct)$