L2 Mathématiques — Option : Courbes paramétrées

Contrôle Continu Terminal

Vendredi 20 Décembre 2013

Exercice 1

I a. $x(t)$ et $y(t)$ sont définies sur $\mathbb{R}$

- $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On fera une étude sur $\mathbb{R}_+$ puis on complète par une symétrie d'axe Ox
- $x'(t) = \dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$ $\quad y'(t) = \dfrac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$

$y'(t) = 0 \iff t = \sqrt{-2+\sqrt{5}} = t_0 \simeq 0{,}485$

t	0	t_0	$+\infty$
x'	$-$		$-$
y'	$+$		$-$
x	1	$\searrow m$	$\searrow -1$
y	0	$\nearrow n$	$\searrow -\infty$

$m = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\qquad n = m t_0 \simeq 0{,}3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x(t) = -1$

Donc la droite $x = -1$ est asymptote à la courbe C

b) Formons $\dfrac{y}{x}$; on trouve : $\dfrac{y}{x} = t$

Le paramètre t représente la pente de la droite $(OM(t))$

c) grâce à la question b : $x(t) = \dfrac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

Donc $x(x^2+y^2) = x^2 - y^2$ est l'équation cartésienne de C

d) En posant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, on trouve : $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

e) Etude de la courbe Γ : $\rho = \dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$ $\qquad D_\rho = A = \mathbb{R} - \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\rho(\pi+\theta) = -\rho(\theta)$: la courbe Γ sera décrite 2 fois. On réduit l'intervalle à $A\cap[0,\pi]$; $\rho(\pi-\theta) = -\rho(\theta)$: on réduit l'intervalle à $A\cap[0,\frac{\pi}{2}]$ puis on fera une symétrie par rapport à Ox.

$\rho' = \dfrac{\sin\theta(1+2\cos^2\theta)}{(\cos 2\theta)^2}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ'	0	$+$		$+$	1
ρ	1	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$	0

Le point $O(\theta = \frac{\pi}{2})$ est ordinaire $\rho'(\frac{\pi}{2}) \neq 0$

Asymptote On cherche $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \rho\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$

On pose $\alpha = \theta - \frac{\pi}{4}$

e (suite) $Y = \rho\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\tan\alpha)$

Donc la droite d'équation $Y = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ est asymptote à Γ dans le repère adapté $(\vec{u}(\frac{\pi}{4}), \vec{u}'(\frac{\pi}{4}))$

f) En posant $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, on obtient : $x^2 - y^2 = x$

Soit : $(x-\frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}$. Il s'agit donc d'une hyperbole équilatère

g) Si $\rho_1 = \rho_1(\theta)$ est l'équation polaire de C_1, on a nécessairement $\rho\rho_1 = 1$

Donc $\rho_1(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta}$. Donc $C_1 \equiv \Gamma$. La courbe C est donc "l'inverse" d'une hyperbole équilatère.