

Exercice 4

L2 Mathématiques

Opim : Courbes paramétrées

- $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On fera une étude sur \mathbb{R}_+ puis on complète par une symétrie d'axe Ox

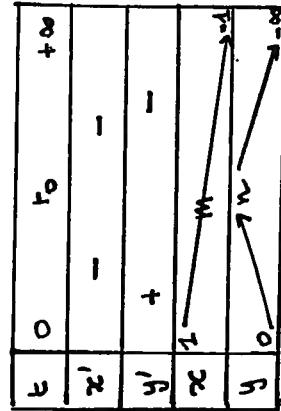
$$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \quad y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$$

$$y'(t)=0 \iff t = \sqrt{-2+\sqrt{5}} \approx 0,485$$

$$m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad n = m t_0 \approx 0,3$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -1$$

Donc la droite $x=-1$ est asymptote à la courbe C



- [b] Pouvons $\frac{y}{x}$ g on trouve : $\frac{y}{x} = \varepsilon$

Le paramètre t représente la pente de la droite $(Dm(\varepsilon))$

$$[c] Grâce à la question b : \quad x(t) = \frac{1-(\frac{y}{x})^2}{1+(\frac{y}{x})^2}$$

Donc $x(x^2+y^2) = x^2-y^2$ est l'équation cartésienne du C

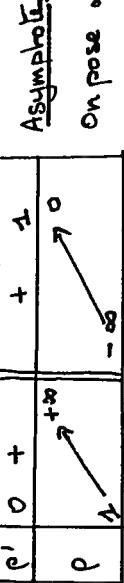
$$[d] En posant $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, on trouve : $\rho = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$$

[e] Etude de la courbe Γ : $\rho = \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta}$

$\rho(\pi+\theta) = -\rho(\theta)$: la courbe Γ sera déviée à sois. On réduit à l'intervalle $\theta \in [0, \pi]$; $\rho(\pi-\theta) = -\rho(\theta)$: on réduit l'intervalle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ puis on tra

une symétrie par rapport à Ox .

$$\rho^1 = \frac{\sin \theta (1+2 \cos^2 \theta)}{(cos \theta)^2}$$



Le point $O(\theta = \frac{\pi}{2})$ est ordinaire

- $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On fera une étude sur \mathbb{R}_+ puis on complète par une symétrie d'axe Ox

$$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \quad y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$$

$$y'(t)=0 \iff t = \sqrt{-2+\sqrt{5}} \approx 0,485$$

$$m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad n = m t_0 \approx 0,3$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -1$$

Donc la droite $x=-1$ est asymptote à la courbe C

$$y = 0$$



$$[f] (suite) \quad y = \rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos(\theta + \pi/4) \sin(\pi/4)}{\sin^2(\theta)} = -\frac{1}{4} (\cos(\theta + \pi/4))$$

$$[g] Donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{4} \cos(\theta + \pi/4)$ dans le repère adapté $(\overline{x}(\frac{\pi}{4}), \overline{y}(\frac{\pi}{4}))$$$

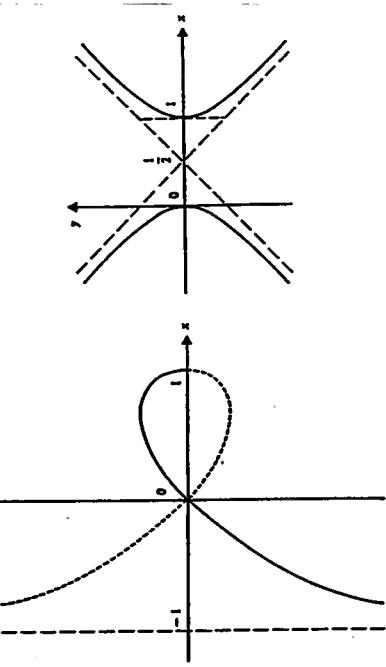
$$[h] En posant $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$, on obtient : $x^2 - y^2 = \cos 2\theta$$$

$$Soit : \quad (x - \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}. \quad Il s'agit donc d'une hyperbole équilatérale$$

$$[i] Si : \rho_1 = \rho_1(\theta) \text{ est l'équation polaire de } C_1, \text{ on a nécessairement } \rho_1 \neq 0$$

$$Donc \rho_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta}. \quad Donc C_1 \equiv \Gamma. \quad La courbe C est donc "épineuse"$$

d'une hyperbole équilatérale.



Compte Continu Terminal
Vendredi 20 Décembre 2013