Université de Tours **L2 Maths 2013-2014**

Option Courbes paramétrées

Deuxième contrôle continu : sujet A

Question de cours

1) Enoncer un théorème du cours qui permet de calculer la longueur de l'arc paramétré $\gamma = (I, \vec{F})$.

Théorème 0.1. *Soit I=* $[a,b]$ *avec* $a < b$*, un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $\vec{F}$ *un application vectorielle de* I *dans* $\mathcal{E}$ *plan euclidien , au moins de classe* $\mathcal{C}^1$ *. Alors l'arc paramétré (I,*$\vec{F}$*) est rectifiable et la longueur de l'arc* AB *où* $A = M(a) etB{=}M\ (b), est : L(AB) = \int_a^b ||\vec{F}'(u))||du$

2) Démontrer que la longueur de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon R entre le point M d'angle polaire $\alpha \in [0, 2\pi]$ et le point P d'angle polaire $\beta \in [0, 2\pi]$ est $R|\alpha - \beta|$.

D'après le théorème ci-dessus , le cercle étant paramétré par $\rho = R$*, la longueur entre le point* M *et le point* P *si* $\beta \geq \alpha$ *est :*

$$L(MP) = \int_\alpha^\beta R d\theta = R(\beta - \alpha)$$

Exercice 1

Soit $R = (0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la courbe plane γ :

$$X(t) := \Big(a(3\cos(t) - \cos(3t)); a(3\sin(t) - \sin(3t))\Big), \text{ pour } t \in [0, 2\pi], \quad a \in \mathbb{R}^+$$

1°)a) Etude rapide d ela courbe et deux axes de symétrie.

on note $x(t) = a(3\cos(t) - \cos(3t))$ *et* $y(t) = a(3\sin(t) - \sin(3t))$*.*

Comme les focntions x *et* y *sont* 2π *périodiques et respectivement paire et impaire, on réduit l'intervalle d'étude à* $[0, \pi]$ *et on fera une symétrie par rapport à (Ox); mais on a aussi*

$$x(\pi - t) = -x(t) \quad y(\pi - t) = y(t)$$

donc on peut se ramener à faire l'étude sur $[0, \pi/2]$ *et faire les symétries par rapport à* (Oy) *puis* (Ox) *pour avoir toute la courbe.*

b) Quels sont les points stationnaires ?

On calcule, en utilisant les formules rappelées :

$$x'(t) = 3a[-\sin(t) + \sin(3t)] = 6a[\sin(t) - 2\sin^3(t)] = 6a\sin(t)[1 - 2\sin^2(t)] = 6a\sin(t)\cos(2t).$$

$$y'(t) = 3a[\cos(t) - \cos(3t)] = 12a[\cos(t) - \cos^3(t)] = 12a\cos(t)[1 - \cos^2(t)] = 6a\sin(t)\sin(2t).$$

Donc le point $M(t)$ est stationnaire si et seulement si $\sin(t) = 0$ ie si $t \in \pi\mathbb{Z}$.

2°) a) Déterminer la longueur totale de γ.

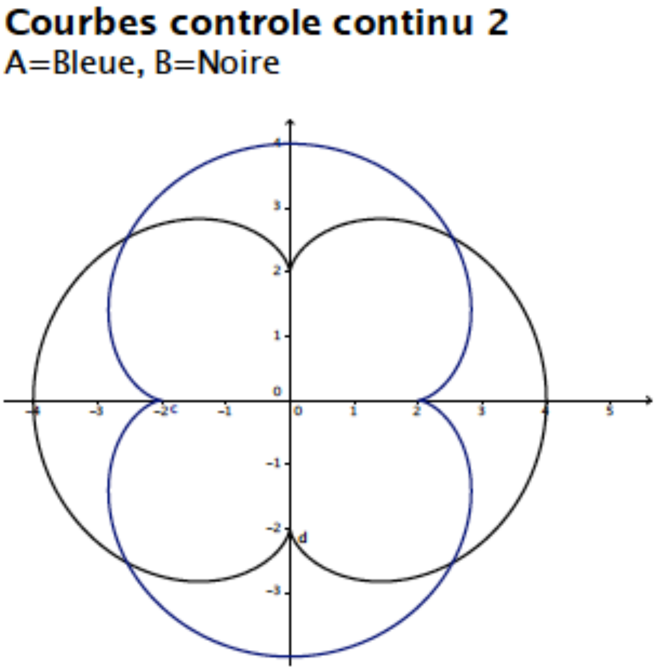
La courbe est bien C^∞*. On a donc*

$$L(\gamma) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6a|\sin(u)|du = 24a$$

2°)b) Quelle est l'abscisse curviligne le long de γ ?

on prend le point $t = 0$ comme valeur initiale, pour $t \in [0, \pi]$

$$s(t) = \int_0^t 6a|\sin u|du = 6a[-\cos(u)]_0^t = 6a(1 - \cos(t))$$



sur $[-\pi, 0]$

$$s(t) = \int_0^t 6a|\sin u|du = -\int_0^t 6a\sin u du = 6a[\cos(u)]_0^t = 6a(-1+\cos(t))$$

Deuxième contrôle continu : sujet B

Exercice 2

Soit $R = (0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la courbe plane γ :

$$X(t) := \Big(b(3\sin(t) - \sin(3t)); b(3\cos(t) - \cos(3t))\Big), \text{ pour } t \in [0, 2\pi], \quad b \in \mathbb{R}^+$$

1°)a) Etudier rapidement la courbe en établissant que l'on peut se ramener à une étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que la courbe possède deux axes de symétrie.

b) Quels sont les points stationnaires ?

2°) a) Déterminer la longueur totale de γ.

2°)b) Quelle est l'abscisse curviligne le long de γ ?

Pour la courbe B , on échange a en b et x devient y et y devient x ce qui évidemment ne change rien aux propriétés de symétrie et on a les mêmes calculs en changeant a en b.