Examen de l'Unité Géométrie élémentaire

Mardi 14 Juin 2011

Durée : 3h

Deux pages recto-verso de résumé de cours autorisées

Calculatrices et matériels électroniques interdits.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction compte pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie et que les réponses non justifiées n'ont pas de valeur. Les notations sont celles du cours .

Exercice 1 :

On considère le triangle direct non aplati ABC d'aire S et on suppose que le triangle ABC a tous ses angles aigus et on désigne par $\hat{A}$ (resp. $\hat{B}$ et $\hat{C}$) la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (resp. de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$) qui appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$

1)Démontrer la relation $2S = a\, b\, \sin(\hat{C})$ et les relations analogues avec $\hat{A}$ et $\hat{B}$.

2) Etablir à l'aide d' homothéties, qu'il existe trois carrés **inscrits** dans le triangle ie dont l'un des cotés est contenu dans un coté du triangle et les deux autres sommets appartiennent aux deux autres cotés du triangle (cf Figure 1). Expliquez comment construire le carré $DEFG$ de la Figure 1.

3a) Déterminer l'aire du carré $DEFG$, inscrit dans ABC et appuyé sur $[BC]$(cf Figure 1), en fonction de a et de $h = AH$, longueur de la hauteur issue de A.

3b) En déduire que parmi les trois carrés de la deuxième question, celui d'aire maximum correspond au carré appuyé sur le coté du triangle de longueur la plus petite .

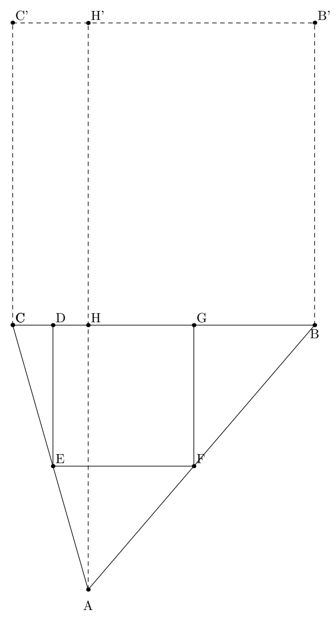

Figure 1

Exercice 2

On se place dans R^3 euclidien et on fixe $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct.
Montrer que la transformation f définie analytiquement, par :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \\ y' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 \end{aligned} \tag{1}$$

où (x', y', z') désigne le triplet de coordonnées du point $M' = f(M)$ si M est le point de coordonnées (x, y, z), est une isométrie.
Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

Problème :

Soit ABC un triangle non aplati du plan affine euclidien et on désigne par G l'isobarycentre de A, B, C. On se fixe pour tout le problème un point M de coordonnées barycentriques $(\alpha, \beta, , \gamma)$ dans le repère barycentrique A, B, C. On rappelle que cela signifie que

$$\text{Pour tout point O du plan} \quad \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} \quad \text{avec } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

On désigne par A_1 le milieu de $[BC]$ et par A' le symétrique de M par rapport à A_1.
1) a) Préciser les coordonnées barycentriques de A_1 et établir que A' a pour coordonnées barycentriques $(-\alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma)$.
b) A quelle condition sur les coordonnées barycentriques de M a-t-on $A' = A$? En déduire les coordonnées barycentriques de A_2, symétrique de A par rapport à A_1.
c) On définit de même les points B', C', B_2 et C_2. Déterminer l'isobarycentre G_2 des points A_2, B_2 et C_2.
On suppose désormais que tous les nombres α, β, γ sont différents de 1.
2) a)Soient M_1(resp M_2) de coordonnées barycentriques $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ (resp.$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Démontrer que M appartient à la droite M_1M_2 si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$.
b)Etablir, grâce à cela, que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point Q de coordonnées barycentriques $(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\beta}{2}, \frac{1-\gamma}{2})$.
c) Démontrer que M, Q et G sont alignés.
d) Vérifier cette propriété en faisant une figure soignée.
3)a) A l'aide de l'homothétie $h(G, -2)$, de centre G et de rapport -2, retrouver le résultat de la question 1)c).
b) Etablir que la transformation $h(M, 2) \circ h(G, -\frac{1}{2})$ est une homothétie, dont on déterminera le centre et le rapport, qui transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$. Retrouvez le résultat de la question 2c).