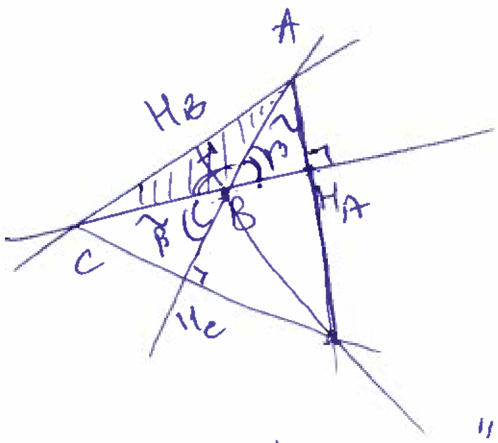
TD3

Exercice 1 : Démontrer que les hauteurs du triangle sont concourantes qd l'orthocentre est à l'extérieur du triangle



C'est une Adaptation de la preuve du cours

$\boxed{\text{Rem}}$: pour s'entraîner Ecrire (AH_A) et une équation, une équation de (BH_B) et (CH_C). Puis utiliser l'exo de la feuille 1, c'est un peu fastidieux mais cela marche que $H_A \in [BC]$ ou à l'extérieur.

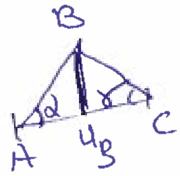
On a des "Céviennes"

$H \in (AH_A) \cap (BH_B)$ est à l'extérieur du triangle. On doit former pour montrer que $H \in (CH_C)$, les produits des rapports

$$\frac{\overline{AH_C}}{\overline{H_CB}} \times \frac{\overline{BH_A}}{\overline{H_AC}} \times \frac{\overline{CH_B}}{\overline{H_BA}}$$

et voir si on trouve 1 ; si oui le Théorème de Céva nous dit que les 3 céviennes sont concourantes

mais $\frac{\overline{AH_C}}{\overline{H_CB}} = -\frac{AH_C}{H_CB}$ et $\frac{\overline{BH_A}}{\overline{H_AC}} = -\frac{BH_A}{H_AC}$



- $\frac{\overline{CH_B}}{\overline{H_BA}} = \frac{CH_B}{H_BA} = \frac{CH_B}{BH_B} \cdot \frac{BH_B}{H_BA} = \frac{1}{\tan\gamma} \cdot \tan\alpha$
- $\frac{\overline{BH_A}}{\overline{H_AC}} = \frac{BH_A}{H_AA} \times \frac{H_AA}{CH_A} = \frac{1}{\tan\tilde{\beta}} \tan\gamma$
- $\frac{AH_C}{H_CB} = \frac{AH_C}{CH_C} \times \frac{H_CC}{H_CB} = \frac{1}{\tan\alpha} \times \tan\tilde{\beta}$

$$\boxed{\frac{\overline{AH_C}}{\overline{H_CB}} \times \frac{\overline{BH_A}}{\overline{H_AC}} \times \frac{\overline{CH_B}}{\overline{H_BA}} = 1}$$