Exercice 8 : Etude de $f : t \to \left(t^3+2+\frac{3t}{1+t^2}, 2t^3+\exp(-t)\right)$

En fait, dans le CCT, on demandait simplement l'étude des branches ∞ ! Etude est un peu "costaud".

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ et f est C^∞ puisque ses composantes le sont.

- Pas de symétries
- $X'(t) = \left(3t^2+\frac{3}{1+t^2}-\frac{6t}{1+t^2}, 6t^2-\exp(-t)\right)$

$X'(t) = \left(\frac{3(1+2t^4+t^6)}{(1+t^2)^2}, 6t^2-\exp(-t)\right)$

Donc $x'(t)>0 \ \forall t$.

L'étude des zéros de $y'(t)$ est plus délicate !!

Posons $\varphi(t)=6t^2-\exp(-t)$, $\varphi'(t)=12t+\exp(-t)$, $\varphi''(t)=12-\exp(-t)$

On a donc $\varphi''(t_1)=0 \Leftrightarrow \exp(-t_1)=12 \Leftrightarrow t_1=-\ln(12)<-1$

Ainsi

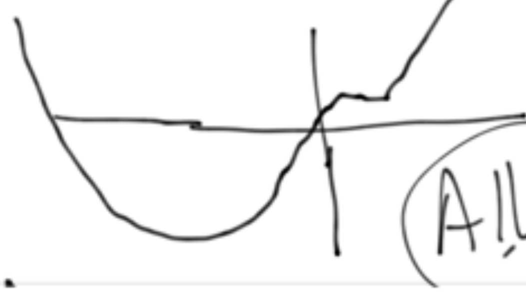
	t_2	t_1	t_3	0	$+\infty$
φ''	$-$	0	$+$		
φ'	$-\infty \searrow$	<0	$\nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	$a \searrow$			$b \nearrow$	

$\varphi'(t_1) = 12t_1+12$
$= 12(1+t_1)$
$= 12(1-\ln(12))<0$

Une petite utilisation de Newton permet d'avoir les valeurs approchées de t_2 (-3.83) et t_3 (-0.09) et donc $a=y'(t_2)>0$ tandis que $b=y(t_3)<0$ voisin de -1

En résumé

	t_2	t_3	$+\infty$
y'	0 $a>0$	0 $b<0$ 0	$+\infty$
y	$\searrow m_1 \nearrow$	$M_2 \searrow m_2 \nearrow$	$+\infty$



Allure

Branches ∞ : Il y a des branches ∞ seulement pour $t\to\pm\infty$

- $t\to+\infty$ $\quad\exp(-t)\to 0$ donc $x(t)\sim t^3$ et $y(t)\sim 2t^3$ donc $y(t)\sim 2x(t)$

On cherche la limite éventuelle de $y(t)-2x(t)=\exp(-t)-4-\frac{6t}{1+t^4}$

$$= -4-\frac{6}{t^3}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

Donc la limite est -4 et la courbe est en dessous

En $t\to-\infty$ $\quad e^{-t}\to+\infty$ $\quad x(t)\underset{t\to-\infty}{\sim} t^3$ $\quad y(t)\underset{t\to-\infty}{\simeq}\exp(-t)$ $\quad\frac{y(t)}{x(t)}\simeq\frac{e^{-t}}{t^3}\longrightarrow-\infty$

donc on a une branche parabolique dans la direction des y.

On peut maintenant tracer la courbe.

Il resterait à trouver, via Newton, les points d'intersection avec l'axe (Oy), (Ox) et éventuellement avec l'asymptote !!!

Remarque : une version alternative pour étudier $\operatorname{sgn}(y'(t))$

$\varphi(t)=t^2e^t-\frac{1}{6}$ $\quad\varphi'(t)=e^t(2t+t^2)=te^t(2+t)$ Donc φ' a le signe de $t(2+t)$

t	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
φ'	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
φ	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$b=-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	

$a=4e^{-2}-\frac{1}{6}>0$ car $24>e^2$

Donc φ possède 3 racines et donne le signe de $y'(t)$ et on retrouve le sens de variation du tableau de variation précédent.