Corrigé de la deuxième petite interro : Groupe 3 Courbes Paramétrées

Sujet A

Enoncé $X(t) = \Big(\underbrace{t^2+1+\frac{2t}{1+t}}_{x(t)}, \underbrace{-t^2+\exp\left(-\frac{t^2}{1+t}\right)}_{y(t)}\Big)$

Etude de $\mathcal{D}_X$ et des branches infinies de l'arc $(\mathcal{D}_X, X)$.

On sait que $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y$. Comme la fonction, $t \xrightarrow{\theta} \frac{1}{1+t}$ est définie pour $t \neq -1$, et les fonctions x et y sont des fonctions C^∞ de θ,
$\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_y = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

La courbe $(\mathcal{D}_X, X)$ admet des branches infinies lorsque t tend vers $\pm\infty$ ou t tend vers -1.

$t \to +\infty$

$x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2+3$ et $y(t) \underset{+\infty}{\sim} -t^2+\exp(-t)$ car $\frac{t^2}{1+t} \underset{+\infty}{\sim} t$

donc $y(t) \underset{+\infty}{\sim} -t^2$

Donc $y(t) \underset{+\infty}{\sim} -x(t)+3$ donc $y(t)+x(t)-3 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La droite $y = x+3$ est asymptote à la courbe

$t \to -\infty$

$x(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} t^2+3$ et $y(t) \underset{-\infty}{\sim} \exp(-t)$ car $\frac{t^2}{1+t} \underset{\infty}{\sim} t$

$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t=-\infty}{\sim} \frac{\exp(-t)}{t^2} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par comparaison classique.

Donc la courbe admet une branche parabolique dans la direction de (Oy)

$t \to -1$

$x(t) \underset{-1}{\sim} \frac{-2}{1+t}$. Pour y, comme $\frac{-t^2}{1+t} \sim \frac{-1}{1+t}$

Il faut distinguer suivant que : $t \to -1_+$ $y(t) \underset{-1_+}{\sim} -1$

Donc la droite $y=-1$ est asymptote à la courbe quand $t \to -1_+$

$t \to -1_-$, $-\frac{1}{1+t} \to +\infty$ et $y(t) \underset{t\to-1_-}{\sim} \exp\left(\frac{-1}{1+t}\right)$

et $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{-1_-}{\sim} -\frac{\exp(-\frac{1}{1+t})}{2} \times (1+t) = g(t)$

et $g(t) \underset{t\to-1_-}{\longrightarrow} +\infty$ car $\frac{\exp(u)}{2u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\left(u = -\frac{1}{1+t}\right)$

Branche parabolique dans la direction de (Oy)

Enoncé Sujet B

$$X(t) = \Big(\underbrace{-t^3 + \exp\left(-2\frac{t^2}{t+1}\right)}_{x(t)},\ \underbrace{2t^3 + 1 - \frac{1}{1+t}}_{y(t)}\Big)$$

mêmes questions que sujet A : comme dans le sujet A,

$\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

La courbe $(\mathcal{D}_X, X)$ a des branches infinies lorsque t tend vers $\pm\infty$ ou vers -1.

<u>$t \to +\infty$</u> $\quad \frac{-2t^2}{t+1} \underset{+\infty}{\sim} -2t$ donc $\exp\left(-\frac{2t^2}{t+1}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

et $x(t) \underset{+\infty}{\sim} -t^3 \qquad y(t) \underset{+\infty}{\sim} 2t^3 + 1$

Donc $y(t) \underset{+\infty}{\sim} -2x(t) + 1$ et la droite $y = -2x + 1$ est asymptote à la courbe.

<u>$t \to -\infty$</u> $\quad x(t) \underset{-\infty}{\sim} \exp(-2t) \qquad y(t) \underset{-\infty}{\sim} 2t^3$

Donc $\quad \frac{y(t)}{x(t)} \underset{-\infty}{\sim} 2t^3 \exp(2t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

La courbe admet une branche parabolique dans la direction de (Ox).

<u>$t \to -1$</u> $\quad y(t) \underset{-1}{\sim} -\frac{1}{1+t}$ et pour x, comme $-\frac{2t^2}{t+1} \underset{-1}{\sim} \frac{-2}{t+\dots}$

il faut distinguer si $t \to -1_+$ ou $t \to -1_-$

<u>$t \to -1_+$</u> $\quad x(t) \underset{-1_+}{\sim} 1 \quad y(t) \underset{-1}{\sim} -\frac{1}{1+t}$ donc la droite $x = 1$ est asymptote

<u>$t \to -1_-$</u> $\quad x(t) \underset{-1_-}{\sim} \exp\left(\frac{-2}{t+1}\right) \quad y(t) \sim \frac{-1}{1+t}$

$\frac{y(t)}{x(t)} \underset{-1_-}{\sim} \frac{-1}{(1+t)\exp\left(\frac{-2}{t+1}\right)} \qquad u = -\frac{1}{1+t} \underset{t\to-1_-}{\longrightarrow} +\infty$

et $\frac{u}{\exp(2u)} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$