

Exercice 4

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos^3 t \sin t \end{pmatrix}$$

1) On sait que $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ ou encore $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$
ce qui donne $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$

$$\cos^3 t \sin t = \cos^2 t \frac{\sin 2t}{2} = \frac{1 + \cos 2t}{2} \cdot \frac{\sin 2t}{2} = \frac{1}{4} (\sin 2t + \frac{\sin 4t}{2})$$

2) X est $C^\infty(\mathbb{R})$ comme chacune de ses fonctions composantes le sont.

$$3) X(-t) = \begin{pmatrix} \cos^2(-t) \\ \cos^3(-t) \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ -\cos^3 t \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$$

x est donc paire et y impaire et le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par la symétrie $/ (Ox)$.

$$4a) X'(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t \cos t \\ \frac{1}{8} (4 \cos 2t + 4 \cos 4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \frac{1}{2} (\cos 2t + \cos 4t) \end{pmatrix}$$

$$t \in [0, \pi/2]$$

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \pi/2$$

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos 4t = -\cos 2t \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = \pi + 2t \\ \text{ou } 4t = -\pi - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = \pi \text{ [} \pi \text{]} \\ 6t = -\pi \text{ [} 2\pi \text{]} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pi/2 \text{ [} \pi \text{]} \\ t = -\pi/6 \text{ [} \frac{2\pi}{6} \text{]} \end{cases}$$

$$t \in [0, \pi/2] \Rightarrow t = \pi/2 \text{ ou } t = \pi/6$$

Donc $M(\pi/6)$ est le seul point stationnaire pour $t \in [0, \pi/2]$

$$b) \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1 + \cos(\pi + 2u)}{2} = \frac{1 - \cos 2u}{2} = x(u)$$

$$\cos^3 t \sin t = \frac{1}{8} (\sin 4t + 2 \sin 2t) = \frac{1}{8} (\sin(\pi + 2u) + \sin(2\pi + 4u)) \\ = \frac{1}{8} (\sin(4u) - 2 \sin(2u)) = y(u)$$

On utilise les développements de cosinus et sinus

$$\cos 2u = 1 - 2u^2 + \frac{4}{3}u^4 + o(u^4) \quad \cos 2u = 1 - 2u^2 + \frac{2u^4}{3} + o(u^4)$$

$$x(u) = u^2 - \frac{4}{3}u^4 + o(u^4)$$

$$y(u) = \frac{1}{8} \left[4u - \frac{(4u)^3}{3!} - \left[4u - 2 \frac{(2u)^3}{3!} \right] + o(u^3) \right]$$

$$y(u) = \frac{u^3}{3! \cdot 8} [4^3 - 4^2] + o(u^3) = \frac{4^2}{3! \cdot 8} (-3) u^3 + o(u^4) = -u^3 + o(u^4)$$

$$X(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + o(u^4)$$



Rebroussement
1^{ère} espèce.

$$5) y^2 = (\cos^3 t \sin t)^2 = \cos^6 t \sin^2 t = x^3 (1 - \cos^2 t) = x^3 (1 - x)$$

Donc tout point $\Gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x^3 (1 - x)\} = \mathcal{C}$

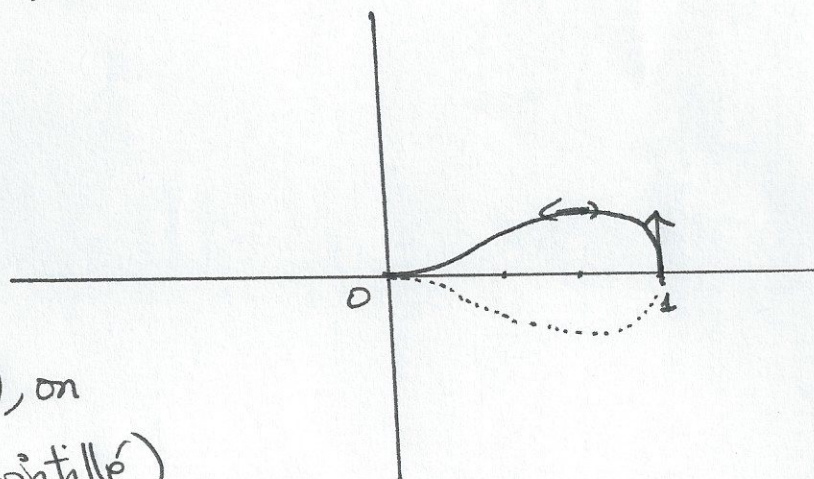
$$6. \mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_- \quad \mathcal{C}_+ = \{(x, y) / y = x \sqrt{x(1-x)}\} \quad \mathcal{C}_- = \{(x, y) / y = -x \sqrt{x(1-x)}\}$$

$f(x) = x \sqrt{x(1-x)}$ $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / x(1-x) \geq 0\}$
 $\mathcal{D}_f = [0,1]$ et f sera c^∞ sur $]0,1[$ (Composée de la fonction racine carrée et d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $]0,1[$).

$$f'(x) = \frac{3x - 4x^2}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

	0	3/4	1
f'		+	-
f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	0



Pour tracer le graphe de X , on fait la symétrie / (Ox) (pointillé)

Exo 3 $G(t) = \|\vec{AM}(t)\|^2 - \|\vec{HM}(t)\|^2$ $H(t) = (0, y(t))$ si $M(t) = (x(t), y(t))$

1) $M(x(t), y(t)) \in C \Leftrightarrow G(t) = 0 \Leftrightarrow (x(t)-a)^2 + y(t)^2 - x(t)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow -2ax(t) + a^2 + y(t)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{y(t)^2 + a^2 = 2ax(t)}$

Donc $C \subset P$ P parabole $y + a^2 = 2ax$

2) $X(t)$ supposée dérivable donc x et y le sont et comme G est dérivable et

$$G'(t) = -2ax'(t) + 2y'(t)y(t)$$

Donc comme $G(t) = 0$ sur C , $G'(t) = 0 \forall t$ et

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \text{ vérifie } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ y(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (G'(t) = 0)$$

et bien sûr $\vec{AM}(t) = \begin{pmatrix} -a \\ y(t) \end{pmatrix}$ donc $X'(t) \perp \vec{AM}(t) \forall t$

3)

