Université de Tours — Année 2014-2015

L2. Courbes paramétrées
Contrôle du 25 Octobre

Les trois exercices sont indépendants. Une bonne rédaction compte !

EXERCICE 1.
Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application dérivable et V un vecteur fixé de $\mathbb{R}^2$.
1) Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) =< V, X(t) >$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2) Si $X(t)$ est une courbe paramétrée pour laquelle la fonction g est constante, dans quel ensemble se trouve la courbe X ?

EXERCICE 2.
On considère la courbe paramétrée suivante, où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre :

$$X(t) = \left(\exp t + t\left(kt^2 - 1\right), \sin t + t\left(\frac{t}{2} - 1\right)\right).$$

1) Montrer que cette courbe admet un point singulier en $t = 0$.
2) Étudier la forme de la courbe au voisinage de ce point en fonction de k.

EXERCICE 3.
On considère la courbe paramétrée définie par l'application

$$X(t) := \left(t^2 + \frac{1}{2t-1}, 2t - \frac{1}{2t-1}\right)$$

1) Donner le domaine de définition de X.
2) Calculer la dérivée $X'(t)$ et dresser un tableau de variations.

3) a) Montrer que quand t tend vers $1/2$, la courbe admet une droite asymptotique D d'équation $y = ax + b$ avec a et b à déterminer.
b) Préciser la position de la courbe par rapport à D (on distinguera les cas $t > 1/2$ et $t < 1/2$).

4) Montrer que quand t tend vers $\pm\infty$, la courbe admet une parabole asymptote d'équation $x = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$.

5) Tracer succinctement la courbe.