Mathématiques 1

MP **2017**

4 heures Calculatrices autorisées

Sur la partie symétrique d'une matrice

Notations

Si n et p sont des entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On définit de façon analogue $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée $A^\top$. On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si $A^\top = A$ et qu'elle est dite *antisymétrique* si $A^\top = -A$.

Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Le groupe des matrices orthogonales à n lignes et n colonnes est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A_s = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ et $A_a = \frac{1}{2}(A - A^\top)$. Ainsi, A_s est une matrice symétrique, A_a est une matrice antisymétrique et $A = A_s + A_a$. On dit que A_s est la *partie symétrique* de A et que A_a est sa *partie antisymétrique*.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ le spectre réel de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

Une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives et elle est dite *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Objectif

L'objectif du problème est d'étudier certaines propriétés des matrices réelles carrées dont la partie symétrique est définie positive.

La première partie apporte quelques résultats préliminaires.

La deuxième partie, où on étudie les matrices F-singulières, et la troisième partie, qui traite des matrices positivement stables, sont largement indépendantes.

I Résultats préliminaires

I.A – Distance de A à A_s

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique donné par $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}(M^\top N)$ où tr désigne la trace. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée.

I.A.1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs dimensions.

I.A.2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|A - A_s\|_2 \leqslant \|A - S\|_2$. Préciser à quelle condition sur $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, cette inégalité est une égalité.

I.B – Valeurs propres de A_s

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.B.1) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $X^\top M Y$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on convient de l'identifier au nombre réel égal à son unique coefficient.

Avec cette convention, montrer que $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top A_s X \geqslant 0$ et que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^\top A_s X > 0$.

I.B.2) Pour toute valeur propre réelle λ de A, montrer que $\min \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leqslant \lambda \leqslant \max \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$.

En déduire que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors A est inversible.

I.B.3) On suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe une unique matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_s$.

b) Montrer qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = \det(A_s)\det(I_n + Q)$.

c) En déduire que $\det(A) \geqslant \det(A_s)$.

I.B.4) On suppose A inversible et, conformément aux notations du problème, $(A^{-1})_s$ désigne la partie symétrique de l'inverse de A. Montrer que $(\det(A))^2 \det((A^{-1})_s) = \det(A_s)$.

On pourra considérer $A(A^{-1})_s A^\top$.

I.C – Partie symétrique des matrices orthogonales

I.C.1) Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de A_s sont dans $[-1, 1]$.

I.C.2) Donner un exemple de matrice symétrique S dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et pour laquelle il n'existe pas de matrice $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A_s = S$.

I.C.3) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a) On suppose que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et que pour toute valeur propre λ de S dans $]-1, 1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$.

b) Réciproquement, montrer que s'il existe $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$, alors $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et pour toute valeur propre λ de S dans $]-1, 1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire.

II Matrices *F*-singulières

Dans la suite de cette partie, on note $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini par

$$\forall X, Y \in E_n, \quad (X \mid Y) = X^\top Y$$

où, comme au I.B.1, on identifie la matrice $X^\top Y$ à son unique coefficient.

Si $1 \leqslant p \leqslant n$, on note $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p.

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *singulière* si elle n'est pas inversible.

Si F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de E_n et si $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que K est *F-singulière* s'il existe $X \in F$ non nul tel que $\forall Z \in F$, $Z^\top K X = 0$. Dans le cas contraire, on dit que K est *F-régulière*.

II.A – Cas où F est un hyperplan

II.A.1) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est singulière si et seulement si elle est E_n-singulière.

Dans cette sous-partie II.A, on suppose désormais $n \geqslant 2$. Soit $F = H$ un hyperplan de E_n et soit $N \in E_n$ un vecteur unitaire normal à H.

II.A.2) Montrer que A est H-singulière si et seulement s'il existe un vecteur non nul X de H et un réel λ tels que $AX = \lambda N$.

II.A.3) En déduire que A est H-singulière si et seulement si la matrice $A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^\top & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est singulière.

Dans les questions suivantes, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.A.4) Montrer qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B_3 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $B_4 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que : $A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1} N \end{pmatrix}$.

II.A.5) En déduire que $\det(A_N) = -N^\top A^{-1} N \det(A)$.

II.A.6) Montrer que si $\det((A^{-1})_s) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est H-singulière.

II.A.7) En déduire que si $\det(A_s) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est H-singulière.

II.A.8) On suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que A est H-régulière pour tout hyperplan H de E_n.

II.B – Exemple

On traitera l'exemple

$$A = A(\mu) = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu \\ -1 & 2-\mu & \mu - 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.B.1) Montrer que $A(\mu)$ est inversible pour tout réel μ.

II.B.2) Calculer $A(\mu)_s$ et montrer que $A(\mu)_s$ est singulière pour $\mu = 1$, $1 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$.

II.B.3) Déterminer un hyperplan H tel que $A(1)$ soit H-singulière.

II.C – Cas où F est de dimension $n-2$

On suppose ici $n \geqslant 3$. Soit F un sous-espace vectoriel de E_n de dimension $n-2$. On considère (N_1, N_2) une base de $F^\perp$ et on pose

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$$

II.C.1) Montrer que A est F-singulière si et seulement s'il existe un élément non nul X de F et deux réels λ_1, λ_2 tels que $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$.

II.C.2) En déduire que A est F-singulière si et seulement si la matrice

$$A_N = \begin{pmatrix} A & N_1 & N_2 \\ N_1^\top & 0 & 0 \\ N_2^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & N \\ N^\top & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$$

est singulière.

Dans les questions suivantes, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C.3) Montrer qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, $B_3 \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1} N \end{pmatrix}$$

II.C.4) En déduire que $\det(A_N) = \det(N^\top A^{-1} N) \det(A)$.

II.C.5) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det(P^\top A^{-1} P) = 0$ si et seulement s'il existe $P' \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det({P'}^\top A P') = 0$.

II.C.6) Montrer que si $N' = \begin{pmatrix} N_1' & N_2' \end{pmatrix}$ alors

$$\det({N'}^\top A N') = ({N_1'}^\top A_s N_1')({N_2'}^\top A_s N_2') - ({N_1'}^\top A_s N_2')^2 + ({N_1'}^\top A_a N_2')^2$$

II.C.7) En déduire que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(N^\top A^{-1} N) > 0$.

II.C.8) En conclure que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A est F-régulière pour tout sous-espace vectoriel F de dimension $n-2$ de E_n.

II.D – Exemple

On reprend l'exemple de la sous-partie II.B avec $\mu = 1$.

II.D.1) Comment choisir $N' = \begin{pmatrix} N_1' & N_2' \end{pmatrix}$ de façon que $\det({N'}^\top A N') = 0$?

II.D.2) Déterminer un sous-espace vectoriel F de E_3 tel que $\dim F = 1$ et tel que $A(1)$ soit F-singulière.

II.E – Cas général

Soit F un sous-espace vectoriel de E_n de dimension $n-p$, où $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

II.E.1) Montrer que A est F-singulière si $\det({N'}^\top A N') = 0$ pour une matrice $N' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ que l'on définira.

On suppose désormais que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.E.2) Montrer que si $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est non nul alors $X^\top {N'}^\top A N' X > 0$.

II.E.3) En déduire que les valeurs propres réelles de ${N'}^\top A N'$ sont strictement positives.

II.E.4) En déduire que $\det({N'}^\top A N') > 0$.

II.E.5) En déduire que A est F-régulière pour tout sous-espace vectoriel $F \neq \{0\}$ de E_n.

III Matrices positivement stables

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positivement stable* si toutes ses valeurs propres complexes ont une partie réelle strictement positive.

III.A – Exemples

III.A.1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est positivement stable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

III.A.2)

a) La somme de deux matrices positivement stables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle nécessairement positivement stable ?

b) Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices positivement stables qui commutent. Montrer que $A+B$ est positivement stable.

III.A.3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A_s soit définie positive.

a) Soit $X = Y + \mathrm{i}Z$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, où Y et Z appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\overline{X} = Y - \mathrm{i}Z$ et on identifie la matrice $\overline{X}^\top AX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ au nombre complexe égal à son unique coefficient.

Montrer que, si $X \neq 0$, alors $\mathrm{Re}(\overline{X}^\top AX) > 0$, où $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.

b) Montrer que A est positivement stable.

III.A.4) Donner un exemple de matrice A positivement stable telle que A_s n'est pas définie positive.

III.B – Dans cette sous-partie III.B, on établit un résultat sur l'exponentielle de matrice qui sera utile par la suite.

On rappelle que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle de M est définie par

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

La fonction $t \mapsto \exp(tM)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est donnée par

$$t \mapsto M\exp(tM) = \exp(tM)M$$

de plus, $\exp(-tM)\exp(tM) = I_n$ pour tout réel t.

III.B.1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Soit u une fonction à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

On suppose que la fonction $v = u' + \lambda u$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que u est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra considérer l'équation différentielle $y' + \lambda y = v$.

III.B.2) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure à coefficients complexes. On suppose que les coefficients diagonaux de T sont des nombres complexes de partie réelle strictement positive. Soit $u_1, ..., u_n$ des fonctions à valeurs complexes, définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et soit, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $U'(t) + TU(t) = 0$.

Montrer que les fonctions u_j, où $1 \leqslant j \leqslant n$, sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

III.B.3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positivement stable de valeurs propres complexes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et soit α un réel tel que $0 < \alpha < \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{Re}(\lambda_j)$.

Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\exp(-tA)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra appliquer la question III.B.2 à une matrice triangulaire T semblable à $A - \alpha I_n$.

III.C – Une caractérisation des matrices positivement stables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positivement stable. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = A^\top M + MA.$$

III.C.1) Montrer que Φ est positivement stable, c'est-à-dire que sa matrice dans une base quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positivement stable.

III.C.2)

a) Montrer qu'il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top B + BA = I_n$.

b) Montrer que B est symétrique et que $\det(B) > 0$.

III.C.3) Pour tout réel t, on pose $V(t) = \exp(-tA^\top)\exp(-tA)$ et $W(t) = \displaystyle\int_0^t V(s)\,\mathrm{d}s$.

a) Montrer que, pour tout réel t, $V(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et que, si $t > 0$, $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que, pour tout réel t, $A^\top W(t) + W(t)A = I_n - V(t)$.

c) Qu'obtient-on en faisant tendre t vers $+\infty$ dans l'égalité précédente ? En déduire que la matrice B de la question III.C.2 est définie positive.

• • • FIN • • •