Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2009-2010**

Master 1 de Mathématiques et Master MIMATS **10 Juin 2010**

Épreuve de Probabilités 1 (session 2, durée : 3 heures)

Documents et tout matériel électronique interdits. Un formulaire est joint au sujet.

Exercice 1 - Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières et soit $0 < p < 1$ un nombre réel fixé. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$, est une loi binomiale de paramètres (n, p), c'est à dire

$$\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$$

1. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Démontrer que $\mathbb{E}(XY) = p\mathbb{E}(X^2)$ puis donner la valeur de $\mathbb{E}(XY)$ en fonction de p et λ.
4. Montrer, en utilisant la formule de l'espérance totale, que $\mathbb{E}((XY)^2) = p(1-p)\mathbb{E}(X^3) + p^2\mathbb{E}(X^4)$; en déduire la valeur de $\mathbb{E}((XY)^2)$ en fonction de p et λ.

Exercice 2 - Le comportement du climat dans un pays imaginaire est supposé régi par une chaîne de Markov à deux états S et H : l'état S correspond à un temps sec et l'état H à un temps humide. Les probabilités de transition d'un jour à l'autre sont :

$$p_{SS} = \frac{4}{5},\ p_{SH} = \frac{1}{5},\ p_{HS} = \frac{2}{5},\ p_{HH} = \frac{3}{5}.$$

(où p_{SS} est la probabilité qu'il fasse sec demain sachant qu'il fait sec aujourd'hui, etc...).

1. S'il fait humide aujourd'hui quelle est la probabilité pour qu'il fasse sec
   - après demain.
   - dans trois jours.
2. Sachant qu'il fait humide aujourd'hui, trouver une valeur approchée de la probabilité qu'il fasse sec dans 100 jours. On justifiera précisément la méthode utilisée.

Exercice 3 - Un livre de 200 pages contient 1000 erreurs d'impression réparties au hasard (c'est-à-dire indépendamment les unes des autres et suivant une loi uniforme sur les différentes pages).

1. On note X le nombre d'erreurs figurant page 112. Donner la loi de X, calculer son espérance et sa variance.
2. En approchant de la loi de X par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre, évaluer la probabilité pour qu'il y ait page 112 :

- aucune erreur ;
- exactement deux erreurs ;
- au moins trois erreurs.

3. En approchant de la loi de X par une loi normale, déterminer la valeur de a telle que $\mathbb{P}[5-a \leq X \leq 5+a] \simeq 0.95$. (on rappelle dans ce cas que $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{1,96} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,975$.)

Exercice 4 - Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de dimension 2, distribué suivant la loi uniforme dans le parallélogramme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y - 1 \leq x \leq y\}.$$

1. Représenter D dans le plan euclidien et expliciter la loi de (X, Y).
2. Calculer l'espérance des variables X et Y
3. Calculer la covariance des variables X et Y.
4. Expliciter les fonctions de répartition des variables X et Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
6. Les variables aléatoires $|X|$ et Y sont-elles indépendantes ? (indication : on calculera par exemple $\mathbb{P}(|X| \geq \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{1}{2})$.)