Master 1 Corrigé de l'épreuve de probabilités 2 du Lundi 3 Mai 2010

(I) 1) (C.N.) Soit $X=(X_1,\dots,X_n)$ vecteur aléatoire tel que les X_i sont indépendantes et de même loi $N(0,\sigma^2)$. Alors
$$\varphi_X(t_1,\dots,t_n)=\mathbb{E}(e^{i\langle t,X\rangle})=\mathbb{E}(e^{i(t_1X_1+\dots+t_nX_n)})=$$
$$\mathbb{E}(e^{it_1X_1}e^{it_2X_2}\dots e^{it_nX_n})=\mathbb{E}(e^{it_1X_1})\dots\mathbb{E}(e^{it_nX_n})$$
(indépendance des v.a. $e^{it_1X_1},\dots,e^{it_nX_n}$). D'où
$$\varphi_X(t)=\varphi_{X_1}(t_1)\dots\varphi_{X_n}(t_n)=e^{-\frac{1}{2}t_1^2\sigma^2}\dots e^{-\frac{1}{2}t_n^2\sigma^2}=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t_1^2+\dots+t_n^2)}$$
C.S) Soit X un vecteur aléatoire tel que $\varphi_X(t)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|t\|^2}=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t_1^2+\dots+t_n^2)}=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t_1^2}\dots e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t_n^2}$. Alors en prenant $t=(0,\dots0,t_k,0,\dots,0)$ on voit que $\varphi_X(t)=\varphi_{X_k}(t_k)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t_k^2}$ donc X_k est de loi $N(0,\sigma^2)$. De plus $\forall t\in\mathbb{R}^n$, $\varphi_X(t)=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)\dots\varphi_{X_n}(t_n)$ donc les X_k sont indépendantes (th. du cours). Soit $u\in\mathbb{R}$, on a
$$\varphi_{\langle t,X\rangle}(u)=\mathbb{E}(e^{iu\langle t,X\rangle})=\mathbb{E}(e^{i\langle tu,X\rangle})=\varphi_X(tu)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|t\|^2u^2}$$
$\Longrightarrow \langle t,X\rangle$ est de loi $N(0,\sigma^2\|t\|^2)$.

2) X vecteur aléatoire de fonction caractéristique $\varphi_X(t)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|t\|^2}$ et $Y=AX$. Alors $\varphi_Y(t)=\mathbb{E}(e^{i\langle t,AX\rangle})=\mathbb{E}(e^{i\langle {}^tA.t,X\rangle})$
$=\varphi_X({}^tA.t)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|{}^tA.t\|^2}=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|t\|^2}$ car A est orthogonale donc ${}^tA$ aussi et alors $\|{}^tA.t\|^2=\|t\|^2$. Donc Y est de même loi que X.

3) Soit M une matrice quelconque et $Z=MX$. Alors $\varphi_Z(t)=$
$$\mathbb{E}(e^{i\langle t,MX\rangle})=\mathbb{E}(e^{i\langle {}^tM.t,X\rangle})=\varphi_X({}^tM.t)=$$
$$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|{}^tM.t\|^2}=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\langle {}^tM.t,{}^tM.t\rangle}=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\langle t,M{}^tM.t\rangle}=$$
$e^{-\frac{1}{2}\langle t,\sigma^2M{}^tM.t\rangle}$, ce qui montre que Y est gaussien centré et de matrice des covariances $\sigma^2M{}^tM$. 4) voir à la fin du corrigé.

(II) Partie A : 1) On doit vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$\int_{[Z=n]}mZ\,d\mathbb{P}=\int_{[Z=n]}Y\,d\mathbb{P}\quad (*)$$
Si $n=0$, il est clair que les 2 membres sont nuls. Supposons $n>0$. Le premier membre de $(*)$ vaut
$$\int_{[Z=n]}mZ\,d\mathbb{P}=\mathbb{E}(mZ\mathbb{1}_{[Z=n]})=\mathbb{E}(m.n\mathbb{1}_{[Z=n]})=nm\,\mathbb{P}(Z=n).$$
Le deuxième membre de $(*)$ vaut
$$\int_{[Z=n]}Y\,d\mathbb{P}=\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{[Z=n]}\mathbb{1}_{[Z>0]}\sum_{k=1}^{Z}X_k\Big)=\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{[Z=n]}\sum_{k=1}^{n}X_k\Big)$$
$$=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[Z=n]})\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k\Big)\ \text{(indépendance de } Z \text{ et des } X_k)$$
$$=\mathbb{P}(Z=n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=nm\,\mathbb{P}(Z=n).$$ D'où l'égalité $(*)$ ce qui prouve que $\mathbb{E}(Y/Z)=mZ$.

2) On doit vérifier de même que $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$\int_{[Z=n]}(m^2Z^2+\sigma^2Z)\,d\mathbb{P}=\int_{[Z=n]}Y^2\,d\mathbb{P}\quad (**)$$
Il suffit de supposer $n>0$ (pour $n=0$, les 2 membres sont nuls). Le premier membre de $(**)$ vaut $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[Z=n]}(m^2Z^2+\sigma^2Z))=$
$$\mathbb{E}((n^2m^2+n\sigma^2)\mathbb{1}_{[Z=n]})=\mathbb{P}(Z=n)(n^2m^2+n\sigma^2).$$
Le deuxième membre vaut $\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{[Z=n]}\big(\sum_{k=1}^{n}X_k\big)^2\Big)=$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{[Z=n]})\,\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right)$ (indépendance de Z et des X_k)

$= \mathbb{P}(Z=n)\left[\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) + \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right)^2\right] =$

$\mathbb{P}(Z=n)\left(n\sigma^2 + (nm)^2\right)$. D'où l'égalité (**), ce qui prouve que

$\mathbb{E}(Y^2|Z) = m^2 Z^2 + \sigma^2 Z$.

Partie B : 1) $\mathbb{E}\left(\frac{Z_{n+1}}{m^{(n+1)}} \middle| \mathcal{F}_n\right) = \frac{1}{m^{(n+1)}}\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) =$

$\frac{1}{m^{(n+1)}}\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_n) = \frac{1}{m^{(n+1)}}\, m\, Z_n = \frac{Z_n}{m^n}$ (partie A).

Donc $\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2) a) $\mathbb{E}\left(\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)^2\right) = \frac{1}{m^{2n}}\mathbb{E}(Z_n^2)$.

Par la propriété de l'espérance totale (formulaire) on a

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Z_n^2|Z_{n-1})\right) = \mathbb{E}\left(m^2 Z_{n-1}^2 + \sigma^2 Z_{n-1}\right) = m^2\,\mathbb{E}(Z_{n-1}^2) + \sigma^2\,\mathbb{E}(Z_{n-1})$$

De même $\mathbb{E}(Z_{n-1}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Z_{n-1}|Z_{n-2})\right) = \mathbb{E}(m Z_{n-2}) = m\,\mathbb{E}(Z_{n-2})$

D'où

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = m^2\,\mathbb{E}(Z_{n-1}^2) + \sigma^2 m\,\mathbb{E}(Z_{n-2})$$

et par récurrence descendante :

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = m^2\left(m^2\,\mathbb{E}(Z_{n-2}^2) + \sigma^2\,\mathbb{E}(Z_{n-3})\right) + \sigma^2 m\,\mathbb{E}(Z_{n-2})$$
$$= (m^2)^2\,\mathbb{E}(Z_{n-2}^2) + m^2\sigma^2\,\mathbb{E}(Z_{n-3}) + \sigma^2 m\,\mathbb{E}(Z_{n-2})$$
$= (m^2)^3\,\mathbb{E}(Z_{n-3}^2)$ + termes en m^2 d'ordre < 3, etc...

$(m^2)^n$ + un polynôme en m^2 de degré $< n$. Donc,

$\mathbb{E}(Z_n^2) \sim (m^2)^n$ quand $n \to +\infty$ puisque $m > 1$. Il en résulte que la suite $\mathbb{E}\left(\frac{Z_n^2}{m^{2n}}\right)$ est bornée donc $\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2.

b) D'après un théorème du cours, il existe une v.a. $X_\infty \in L^2$ telle que $\frac{Z_n}{m^n} \longrightarrow X_\infty$ dans L^2 et presque sûrement

(En particulier pour les $\omega \in \Omega$ tels que $X_\infty(\omega) > 0$, la suite $Z_n(\omega)$ se comporte comme $m^n X_\infty(\omega)$).

III 1) D'après le cours, le nombre de clients qui arrivent entre les instants $t=a$ et $t=b$ est une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda(b-a)$. Donc le nombre moyen de clients arrivant entre ces 2 instants est égal à $\lambda(b-a)$ et sa variance est aussi $\lambda(b-a)$.

2) a) Comme N_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a $\mathbb{E}(N_t|\mathcal{F}_t) = N_t$.

On a donc

$$\mathbb{E}(N_{t+h}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(N_{t+h} - N_t|\mathcal{F}_t) + N_t$$
$$= \mathbb{E}(N_{t+h} - N_t) + N_t$$ (car $N_{t+h} - N_t$ est une v.a. indépendante de $\mathcal{F}_t$) donc

$$\mathbb{E}(N_{t+h}|\mathcal{F}_t) = \lambda h + N_t.$$

Mais on a aussi $\mathbb{E}(N_{t+h}|N_t) = \lambda h + N_t$ d'où l'égalité

b) $X_t = N_t - \lambda t$ vérifie

$$\mathbb{E}(X_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(N_{t+h} - \lambda(t+h) \mid \mathcal{F}_t\right)$$
$$= \mathbb{E}(N_{t+h} \mid \mathcal{F}_t) - \lambda(t+h)$$
$$= \lambda h + N_t - \lambda(t+h) \quad \text{d'après a)}$$
$$= X_t, \text{ d'où le résultat demandé.}$$

c) D'après le cours, la martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^2 si et seulement si elle est bornée dans L^2. Mais on a

$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}\left((N_n - \lambda n)^2\right) = \operatorname{Var} N_n = \lambda n$ donc la suite $\mathbb{E}(X_n^2)$ n'est pas bornée ce qui implique que (X_n) ne converge pas dans L^2.

3) a) $N_n = \underset{0}{N_0} + (N_1 - N_0) + (N_2 - N_1) + \cdots + (N_n - N_{n-1})$ est somme de n v.a. indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ. La loi forte des grands nombres de Kolmogorov implique alors : $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} = \lambda$ p.s.

b) On en déduit que $N_n \sim \lambda n$ p.s. D'où $\lim_{n\to+\infty} N_n = +\infty$ p.s. Mais comme $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus croissant, ceci implique $N_t \to +\infty$ p.s. quand $t \to +\infty$.

4) $\mathbb{P}(T_{n+1} > t) = \mathbb{P}(T_n + \tau_{n+1} > t)$. (*)

Or $[T_n + \tau_{n+1} > t] = [\tau_{n+1} > t] \cup [0 < \tau_{n+1} < t] \cap [T_n > t - \tau_{n+1}]$

D'où (*) $= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t) + \mathbb{P}(0 < \tau_{n+1} < t, T_n > t - \tau_{n+1})$.

Si f désigne la densité de τ_{n+1}, la formule de la probabilité totale et l'indépendance des v.a. T_n et τ_{n+1} implique

$$\mathbb{P}(0 < \tau_{n+1} < t, T_n > t - \tau_{n+1}) =$$

$$\int_0^t \mathbb{P}(T_n > t - x) f(x)\,dx =$$

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-x)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(t-x)^k}{k!} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \quad (\text{et } f(x) = \lambda e^{-\lambda x})$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \int_0^t (t-x)^k\,dx$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \frac{t^{k+1}}{k+1} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

D'où

$$\mathbb{P}(T_{n+1} > t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

et l'hypothèse de récurrence est vérifiée.

(I) 4) $\varphi_X(t) = e^{i\langle m_1, t\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma_1 t\rangle}$ $\varphi_Y(t) = e^{i\langle m_2, t\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma_2 t\rangle}$

$\varphi_{X-2Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, X-2Y\rangle}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, X\rangle} e^{-2i\langle t, Y\rangle}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, X\rangle}\right)\mathbb{E}\left(e^{-2i\langle t, Y\rangle}\right)$ (indépendance de X et Y) $= \varphi_X(t)\varphi_Y(-2t) = e^{i\langle m_1, t\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma_1 t\rangle} e^{i\langle -2m_2, t\rangle} \cdot e^{-\frac{1}{2}\langle -2t, \Gamma_2(-2t)\rangle} = e^{i\langle m_1 - 2m_2, t\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle t, (\Gamma_1 + 4\Gamma_2)\cdot t\rangle}$. D'où $X - 2Y$ est de loi $N_n(m_1 - 2m_2, \Gamma_1 + 4\Gamma_2)$.