Exercice I : 1) (⇒) supposons que les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes et de loi $N(0,\sigma^2)$. Alors $\varphi_{X_1}(t)=\varphi_{X_2}(t)=\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2t^2)$ et le vecteur $X=(X_1,X_2)$ a pour fonction caractéristique

$$\varphi_X(t_1,t_2)=\mathbb{E}\left(e^{i(t_1X_1+t_2X_2)}\right)=\mathbb{E}\left(e^{it_1X_1}e^{it_2X_2}\right)$$

$$=\mathbb{E}(e^{it_1X_1})\,\mathbb{E}(e^{it_2X_2})\quad \text{(indépendance de } X_1 \text{ et } X_2)$$

$$=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(t_1^2+t_2^2)\right)$$

(⇐) Réciproquement soit $X=(X_1,X_2)$ de fonction caractéristique $\varphi_X(t_1,t_2)=\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2(t_1^2+t_2^2))$. Alors

$\varphi_{X_1}(t_1)=\varphi_X(t_1,0)=\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2t_1^2)$ donc X_1 est de loi $N(0,\sigma^2)$.

De même $\varphi_{X_2}(t_2)=\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2t_2^2)$ et X_2 est de loi $N(0,\sigma^2)$. Mais alors : $\forall(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, $\varphi_X(t_1,t_2)=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$ donc X_1 et X_2 sont indépendantes (d'après un théorème du cours).

2) $X'=AX=(X_1',X_2')=\left(\frac{1}{\sqrt2}(X_1+X_2),\frac{1}{\sqrt2}(X_2-X_1)\right)$

$\varphi_{X'}(t)=\mathbb{E}(e^{i\langle t,AX\rangle})=\mathbb{E}(e^{i\langle {}^tA.t,X\rangle})=\varphi_X({}^tA.t)$

$=\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2\|{}^tA.t\|^2)=\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2\|t\|^2)$ car A est une matrice orthogonale donc $\|{}^tA.t\|=\|t\|$. Il résulte de la question 1) que X_1' et X_2' sont indépendantes et de même loi $N(0,\sigma^2)$.

3) $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}=\frac{1}{\sqrt2}X_1'$ et $Z=(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2=$

$\left(\frac{X_1-X_2}{2}\right)^2+\left(\frac{X_2-X_1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(X_2-X_1)^2=\frac{1}{2}(X_2')^2$. Mais X_1' et X_2' sont indépendantes d'après la question 2) donc $\frac{1}{\sqrt2}X_1'$ et $\frac{1}{2}(X_2')^2$

sont indépendantes (d'après un théorème du cours qui dit que si X_1 et X_2 sont indépendantes alors les v.a. $f(X_1)$ et $g(X_2)$ sont indépendantes $\forall f$ et g fonctions déterministes mesurables).

4) $\overline{X}=\frac{1}{\sqrt2}X_1'$ est de loi normale centrée et de variance $\frac{1}{2}Var(X_1')=\frac{\sigma^2}{2}$ i.e. $\overline{X}$ est de loi $N(0,\frac{\sigma^2}{2})$.

Calculons la loi de $Z=\frac{1}{2}(X_2')^2$ sachant que X_2' est de loi $N(0,\sigma^2)$:

$$\mathbb{P}(Z\le t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\le 0\\ \mathbb{P}(-\sqrt{2t}\le X_2'\le\sqrt{2t}) & \text{si } t>0\end{cases}$$

Pour $t>0$, on a donc $\mathbb{P}(Z\le t)=\mathbb{P}(X_2'\le\sqrt{2t})-\mathbb{P}(X_2'\le-\sqrt{2t})$ $=F_{X_2'}(\sqrt{2t})-F_{X_2'}(-\sqrt{2t})$ où $F_{X_2'}$ est la fonction de répartition de la loi $N(0,\sigma^2)$. En dérivant par rapport à t, on obtient la densité de Z :

$$f_Z(t)=\frac{\sqrt2}{\sqrt t}f_{X_2'}(\sqrt{2t})+\frac{\sqrt2}{\sqrt t}f_{X_2'}(-\sqrt{2t})=\frac{2\sqrt2}{\sqrt t}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(2t)}{\sigma^2}\right)\Big/\sqrt{2\pi}\,\sigma\;\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi t}\,\sigma}\exp\left(-\frac{t}{\sigma^2}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

Exercice II : I) Les événements de la tribu $\mathcal{B}_X$ engendrée par la v.a. X sont de la forme $[X\in C]$ où C est un borélien de $\mathbb{R}$. Il suffit de vérifier que $\forall C$ borélien de $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{[X\in C]}f(X)\,d\mathbb{P}=\int_{[X\in C]}\varphi(Z,X)\,d\mathbb{P},$$

où on a posé $f(x)=\mathbb{E}(\varphi(Z,x))$ $(x\in\mathbb{R})$. Calculons le premier membre :

$$\int_{[X\in C]} f(X)\,d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_{[X\in C]} f(X)\,d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_C(X) f(X)\,d\mathbb{P} =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x) f(x)\mu_X(dx)$$ (où μ_X est la loi de probabilité de X)

d'après la formule du transfert. Vu la forme de f, cette intégrale vaut encore :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x)\,\mathbb{E}(\varphi(Z,x))\mu_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(z,x)\mu_Z(dz)\right)\mu_X(dx)$$ où μ_Z est la loi de Z.

$$= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x)\varphi(z,x)\mu_Z(dz)\mu_X(dx)\ (*)$$ (d'après Fubini)

Mais Z et X sont indépendantes donc $\mu_Z(dz)\mu_X(dx) = \mu_Z\otimes\mu_X(dz,dx)$ donc d'après la formule du transfert (appliqué au vecteur aléatoire (Z,X)) cette intégrale vaut :

$$\int_\Omega \mathbb{1}_C(X)\varphi(Z,X)\,d\mathbb{P} = \int_{[X\in C]} \varphi(Z,X)\,d\mathbb{P}$$ d'où le résultat de la question 1).

II) $Y_n = \mathbb{1}_{[Z_n\le X]}$ est de la loi $\varphi(Z_n,X)$ fonction déterministe de Z_n et X

1) Pour tout $(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\{0,1\}^n$, la v.a.

$$\mathbb{1}_{[Y_1=u_1, Y_2=u_2,\dots,Y_n=u_n]} = \psi(Z,X)$$

est une fonction déterministe de $Z=(Z_1,\dots,Z_n)$ et de X. D'après la partie I) on a donc

$$\mathbb{P}(Y_1=u_1,\dots,Y_n=u_n\,|\,X) = \mathbb{E}(\psi(Z,X)\,|\,X) = f(X)$$

où $f(x) = \mathbb{E}(\psi(Z,x))$ puisque Z et X sont indépendantes. Pour $x\in[0,1]$ fixé, posons

$$Y_n^x = \mathbb{1}_{[Z_n\le x]}$$

et remarquons que Y_n^x est une v.a. de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Z_n\le x) = x$ (puisque Z_n est de loi uniforme sur $[0,1]$)

Alors $$f(x) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[Y_1^x=u_1,\dots,Y_n^x=u_n]}\right)$$
$$= \mathbb{P}(Y_1^x=u_1, Y_2^x=u_2,\dots,Y_n^x=u_n)$$
$$= x^s(1-x)^{n-s}, \quad (s=u_1+\dots+u_n)$$

puisque les Y_k^x sont des v.a. de Bernoulli <u>indépendantes</u> et de même paramètre x. Donc

$$\mathbb{P}(Y_1=u_1,\dots,Y_n=u_n\,|\,X) = X^s(1-X)^{n-s}\ (\text{p.s.}).$$

2) $\mathbb{E}(Y_n|X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[Z_n\le X]}|X) = \mathbb{E}(\varphi(Z_n,X)|X)$

où φ est la fonction déterministe telle que

$$\varphi(Z_n, X) = \mathbb{1}_{[Z_n \le X]}$$

D'après la partie I) on a donc $\mathbb{E}(Y_n|X) = f(X)$ (p.s) où

$$f(x) = \mathbb{E}(\varphi(Z_n,x)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[Z_n\le x]}) = \mathbb{P}(Z_n\le x) = x$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_n|X) = X$ (p.s.).

3) $\mathbb{E}(S_n|X) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k|X\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k|X)$ (linéarité de l'espérance conditionnelle). D'où :

$$\mathbb{E}(S_n|X) = nX \text{ (p.s.)}.$$

On remarque qu'on a aussi $(S_n - nX)^2 = g(Z,X)$ où g est une fonction déterministe et $Z=(Z_1,\dots,Z_n)$. Donc $\mathbb{E}((S_n-nX)^2|X) = f(X)$, où $f(x) = \mathbb{E}(g(Z,x))$. Mais $g(Z,x) = (S_n^x - nx)^2$ où $S_n^x = Y_1^x+\dots+Y_n^x$ est une v.a. Binomiale de paramètres n et $p=x$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(g(Z,x)) = \mathbb{E}((S_n^x-nx)^2) = \mathrm{Var}\, S_n^x = nx(1-x),$$

d'où le résultat $\mathbb{E}((S_n-nX)^2|X) = nX(1-X)$ p.s.

4) $\left\|\frac{S_n}{n} - X\right\|_2^2 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n}-X\right)^2\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}((S_n-nX)^2)$. Mais

$\mathbb{E}((S_n-nX)^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((S_n-nX)^2|X))$ (propriété de l'espérance conditionnelle : thm des 3 perpendiculaires). D'où

$\mathbb{E}((S_n-nX)^2) = \mathbb{E}(nX(1-X)) = n\,\mathbb{E}(X(1-X)) \le n$ (car $X\in[0,1]$ p.s.). D'où $\left\|\frac{S_n}{n}-X\right\|_2^2 \le \frac{1}{n^2}n = \frac{1}{n} \to 0$ si $n\to+\infty$

Ceci signifie que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} X$ dans L^2 donc en probabilité.

Exercice III 1) $N_{t+h}-N_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ donc $\mathbb{E}(N_{t+h}-N_t|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(N_{t+h}-N_t) = \lambda h$ (car $N_{t+h}-N_t$ est de loi de Poisson de paramètre λh.

$$\mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(N_{t+h}-\lambda(t+h)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(N_{t+h}|\mathcal{F}_t) - \lambda(t+h)$$

$= \mathbb{E}(N_{t+h}-N_t|\mathcal{F}_t) + N_t - \lambda(t+h)$ (car $\mathbb{E}(N_t|\mathcal{F}_t)=N_t$)

$= \lambda h + N_t - \lambda(t+h) = X_t$ (p.s.).

2) 1. t fixé. $\mathbb{P}(Y_t=0) = \mathbb{P}(N_t=0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

si $k>0$, $\mathbb{P}(Y_t=k) = \sum_{n\ge k}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k|N_t=n\right)\mathbb{P}(N_t=n)$

(formule de la probabilité totale). D'où

$$\mathbb{P}(Y_t=k) = \sum_{n\ge k} C_n^k p^k q^{n-k} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t}\frac{p^k}{k!}\sum_{n\ge k}(\lambda t)^n\frac{q^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda p t)^k}{k!}\sum_{n\ge k}\frac{(\lambda t)^{n-k}q^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{\lambda t(1-p)} = e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}$$

d. Y_t suit la loi de Poisson de paramètre λpt.

2. En utilisant la formule de la probabilité totale comme ci-dessus, on montre par un calcul strictement analogue que $N_t - Y_t$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)t$.

3. Comme (N_t) est un processus de Markov, pour tout $t>0$ et $h>0$

$$Y_{t+h}-Y_t = \mathbb{1}_{[N_t>0]}\sum_{j=N_t+1}^{N_{t+h}} X_j$$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ donc

(Y_t) est un processus à accroissements indépendants et un calcul analogue à celui de la question 1. et 2. montre que la loi de $Y_{t+h}-Y_t$ est la loi de Poisson de paramètre λph donc les accroiss^t sont stationnaires. Un calcul analogue à celui vu en cours pour (N_t) montre que $(Y_t)_{t\ge 0}$ est de Markov. Par 2. (Y_t) est de Poisson de paramètre λh.