Devoir de Probabilités 2 du 11/02/2011 Master Mimats

Exercice 1 : 1) X de loi $N(0,1) \Rightarrow \varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ $(t\in\mathbb{R})$

Si Y est de loi $N(m,\sigma^2)$, $\tilde{Y} = \frac{Y-m}{\sigma}$ (v.a. centrée réduite) est de loi $N(0,1) \Rightarrow Y = \sigma\tilde{Y}+m$. D'où

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{it(\sigma\tilde{Y}+m)}) = e^{itm}\varphi_{\tilde{Y}}(\sigma t) = e^{itm}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}.$$

2) $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ}) = \mathbb{E}(e^{it(2X+3Y)}) = \mathbb{E}(e^{i2tX}e^{i3tY}) =$

$\mathbb{E}(e^{i2tX})\,\mathbb{E}(e^{i3tY})$ (indépendance des v.a. X et Y)

$= \varphi_X(2t)\varphi_Y(3t) = e^{im_12t}e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^24t^2}e^{im_23t}e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^29.t^2} =$

$e^{i(2m_1+3m_2)}e^{-\frac{1}{2}(4\sigma_1^2+9\sigma_2^2)t^2} \Rightarrow Z$ est de loi $N(2m_1+3m_2, 4\sigma_1^2+9\sigma$

Exercice 2 : $\Gamma = (\Gamma_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ où $\Gamma_{ij} = \mathbb{E}((X_i-\mathbb{E}(X_i))(X_j-\mathbb{E}(X_j)))$

- $\Gamma_{11} = \mathbb{E}((X_1-\mathbb{E}(X_1))^2) = \mathbb{E}[((X-1)+(Y-3))^2] = \mathbb{E}[(X-1)^2+(Y-3)^2+2(X-1)(Y-3)]$

  $= \mathbb{E}((X-1)^2)+\mathbb{E}((Y-3)^2)+2\underbrace{\mathbb{E}(X-1)\mathbb{E}(Y-3)}_{=0}$ (indépendance de X et Y)

  $= \operatorname{Var}X + \operatorname{Var}Y = 2+3 = 5$

- $\Gamma_{22} = \mathbb{E}[(X_2-\mathbb{E}(X_2))^2] = \mathbb{E}[((X-1)-(Y-3))^2] = \mathbb{E}((X-1)^2+(Y-3)^2-2(X-1)(Y-3))$

  $= \mathbb{E}((X-1)^2)+\mathbb{E}((Y-3)^2)-2\underbrace{\mathbb{E}(X-1)\mathbb{E}(Y-3)}_{=0} = \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y = 5$

- $\Gamma_{12}\,(=\Gamma_{21}) = \mathbb{E}[(X_1-\mathbb{E}(X_1))(X_2-\mathbb{E}(X_2))] = \mathbb{E}[((X-1)+(Y-3))((X-1)-(Y-3))]$

  $= \mathbb{E}[(X-1)^2-(Y-3)^2] = \operatorname{Var}X-\operatorname{Var}Y = 2-3 = -1$. D'où

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2a) Si $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2 = \lambda_1(X+Y)+\lambda_2(X-Y) = (\lambda_1+\lambda_2)X+(\lambda_1-\lambda_2)Y$ est une v.a. normale comme somme de 2 v.a. normales indépendantes

donc $X = (X_1,X_2)$ est un vecteur gaussien.

Soit $m = (\mathbb{E}(X_1),\mathbb{E}(X_2)) = (3,-1)$

$$\varphi_X(t) = e^{i\langle m,t\rangle}e^{-\frac{1}{2}\langle t,\Gamma t\rangle} \quad \left(\langle t,\Gamma t\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5t_1-t_2 \\ -t_1+5t_2\end{pmatrix}\right\rangle = 5t_1^2+5t_2^2-2t_1t_2\right)$$

$t=(t_1,t_2)$

$$= e^{i(3t_1-t_2)}e^{-\frac{1}{2}(5t_1^2+5t_2^2-2t_1t_2)}$$

La matrice Γ est de rang 2 (car $\det\Gamma = 24 \neq 0$) donc le vecteur X a une densité qui d'après le cours vaut :

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}\exp\left(-\frac{1}{2}\langle t-m, \Gamma^{-1}(t-m)\rangle\right)$$

L'inverse de la matrice Γ est $\Gamma^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5\end{pmatrix}$

D'où l'expression de la densité du vecteur X.