Devoir de Probabilités 2 (Master Mimats) du 1/04/2011

Corrigé détaillé du Devoir

Exercice 1 : 1) $\mathbb{E}(Y|X)=\mathbb{E}^{\mathcal{B}(X)}(Y)$ où $\mathcal{B}(X)$ est la tribu engendrée par X qui est composée des événements de la forme $[X\in B]$ où $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (la tribu de Borel de $\mathbb{R}$). Ainsi $\mathbb{E}(Y|X)$ est l'unique variable aléatoire $\mathcal{B}(X)$-mesurable telle que:

$$\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \int_{[X\in B]} Y\,d\mathbb{P} = \int_{[X\in B]} \mathbb{E}(Y|X)\,d\mathbb{P}.$$

D'après un résultat du cours $\mathbb{E}(Y|X)=\varphi(X)$ est une fonction déterministe de X.

2) a) $\mathbb{E}(Z|X)=\mathbb{E}(X+Y|X)=\mathbb{E}(X|X)+\mathbb{E}(Y|X)$

Or $\mathbb{E}(X|X)=X$ (car X est $\mathcal{B}_X$-mesurable).

et $\mathbb{E}(Y|X)=\mathbb{E}(Y)=p$ (car Y est indépendante de X)

D'où $\mathbb{E}(Z|X)=X+p$.

De même $\mathbb{E}(Z|Y)=\mathbb{E}(X+Y|Y)=\mathbb{E}(X)+Y=np+Y$.

b) $\mathbb{E}(Z^2|X)=\mathbb{E}(X^2+Y^2+2XY|X)=$

$\mathbb{E}(X^2|X)+\mathbb{E}(Y^2|X)+2\mathbb{E}(XY|X)=$

$X^2+\mathbb{E}(Y^2)+2X\mathbb{E}(Y|X)=X^2+\mathbb{E}(Y^2)+2X\mathbb{E}(Y)$

$=X^2+p+2pX$

(en effet $\mathbb{E}(X^2|X)=X^2$ car X^2 est $\mathcal{B}(X)$ mesurable,

$\mathbb{E}(Y^2|X)=\mathbb{E}(Y^2)$ car Y^2 est indépendante de X

$\mathbb{E}(XY|X)=\mathbb{E}^{\mathcal{B}(X)}(XY)=X\,\mathbb{E}^{\mathcal{B}(X)}(Y)$ d'après un résultat du cours car X et $Y\in L^2$ et X est $\mathcal{B}(X)$-mesurable.

c) si $\omega\in[Z=k]$, on a $\mathbb{E}(X|Z)(\omega)=\mathbb{E}(X|Z=k)=\int_\Omega X\,d\mathbb{P}_{[Z=k]}$

$$=\frac{1}{\mathbb{P}(Z=k)}\int_{[Z=k]} X\,d\mathbb{P} \quad (\text{définition de } \mathbb{P}_{[Z=k]}).$$

Or $[Z=k]=[X=k,Y=0]\cup[X=k-1,Y=1]$. D'où

$$\int_{[Z=k]} X\,d\mathbb{P}=\int_{[X=k,Y=0]} X\,d\mathbb{P}+\int_{[X=k-1,Y=1]} X\,d\mathbb{P}=k\mathbb{P}(X=k,Y=0)+(k-1)\mathbb{P}(X=k-1,Y=1)$$

$=k\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=0)+(k-1)\mathbb{P}(X=k-1)\mathbb{P}(Y=1)$ (indép. de X et Y)

$=k\,C_n^k p^k(1-p)^{n-k+1}+(k-1)\,C_n^{k-1}p^k(1-p)^{n-k+1}$. D'où finalement:

$$\mathbb{E}(X|Z=k)=\frac{k\,C_n^k p^k(1-p)^{n-k+1}+(k-1)\,C_n^{k-1}p^k(1-p)^{n-k+1}}{C_{n+1}^k\,p^k(1-p)^{n+1-k}}$$

puisque Z est de loi $\mathcal{B}(n+1,p)$. On peut simplifier:

$$\mathbb{E}(X|Z=k)=\frac{k\,C_n^k+(k-1)C_n^{k-1}}{C_{n+1}^k}=\frac{k(C_n^k+C_n^{k-1})-C_n^{k-1}}{C_{n+1}^k}=$$

$$=\frac{k\,C_{n+1}^k-C_n^{k-1}}{C_{n+1}^k}=k-\frac{C_n^{k-1}}{C_{n+1}^k}=k-\frac{k}{n+1}=k\frac{n}{n+1}.$$

D'où $\mathbb{E}(X|Z)=Z\frac{n}{n+1}$.

Exercice 2 : le couple (X,Y) a une densité $f(x,y)\equiv 1$ pour $(x,y)\in T$ et $f(x,y)\equiv 0$ si $(x,y)\notin T$, où T est le triangle:

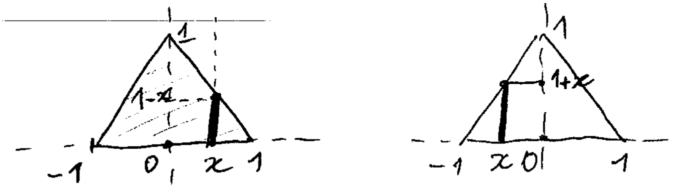

figure.

1) la densité de X est la densité marginale donnée par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [-1,1] \\ \int_0^{1-x} 1\,dy = 1-x \text{ si } x \in [0,1] \\ \int_0^{1+x} 1\,dy = 1+x \text{ si } x \in [-1,0] \end{cases}$$

En résumé : $f_X(x) = (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

Comme (X,Y) a une densité, un résultat du cours montre que $\mathbb{E}(Y|X) = \varphi(X)$, où

$$\varphi(x) = \frac{1}{f_X(x)} \int_{\mathbb{R}} y\, f(x,y)\,dy \quad \text{si } x \in [-1,1] \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Or à x fixé $\in [-1,1]$, on a (voir la figure) :

$$\int_{\mathbb{R}} y\, f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{2}(1-x)^2 \text{ si } x \in [0,1] \\ \int_0^{1+x} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1+x} = \frac{1}{2}(1+x)^2 \text{ si } x \in [-1,0]. \end{cases}$$

En une seule formule, on a : $\int_{\mathbb{R}} y\, f(x,y)\,dy = \frac{1}{2}(1-|x|)^2$.

D'où $\varphi(x) = \dfrac{\frac{1}{2}(1-|x|)^2}{1-|x|} = \frac{1}{2}(1-|x|)$ (si $x \in [-1,1]$ et 0 sinon).

$$= \frac{1}{2}(1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$