Université de Tours

UFR Sciences et Techniques — Année 2010-2011

Master 1 de Mathématiques et Master MIMATS — 6 Janvier 2011

Épreuve de Probabilités 1 (session 1, durée : 3 heures)

Le seul document autorisé est le formulaire joint au sujet.
Tout matériel électronique est interdit.

Les 2 parties sont indépendantes

Partie I

Exercice 1 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements. On considère l'événement

$$A = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k (:= \limsup_{n\to\infty} A_n := \{A_n \ i.s.\})$$

et son événement contraire $A^c = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k^c$.

1) Que peut-on dire de $\mathbb{P}(A)$ lorsque $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$?

On suppose à partir de maintenant que les événements $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$.

2) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k^c\right) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_k)) = 0.$$

(indication : on pourra utiliser l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$ si $x \geq 0$).

3) En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $n \geq 2$, la variable aléatoire X_n prend les trois valeurs $-n$, 0 et n avec les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\ln(n)}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Pour tout $n \geq 2$, on pose alors $S_n = \sum_{k=2}^{n} X_k$.

1) a) Montrer que $\mathrm{Var}(S_n) \leq \frac{n^2}{\ln(n)}$.

b) En déduire que $\frac{S_n}{n} \to 0$ en probabilité quand $n \to +\infty$.

2) Vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) = +\infty$ et en déduire qu'avec probabilité 1, la suite $\frac{S_n}{n}$ ne converge pas presque-sûrement. (indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 1 avec $A_n = [|S_n - S_{n-1}| \geq n]$).

Partie II

Exercice 3 :

1) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un ensemble fini d'états E et de matrice $P = (p(i,j))_{1\leq i,j\leq N}$. Soit R l'ensemble des états absorbants. On considère un état $l \in R$ fixé. Pour tout état $i \in E$, on note $f(i)$ =la probabilité partant de i d'être finalement absorbé par l'état l. Montrer que la fonction f vérifie les propriétés suivantes :

$$f(l) = 1$$
$$f(i) = 0 \text{ si } i \in R \setminus \{l\}$$
$$f(i) = \sum_{j\in E} p(i,j) f(j) \text{ si } i \notin R$$

2) Application : On suppose que $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ où les états 0 et 6 sont absorbants et pour tout $i \notin \{0,6\}$, on a $p(i,i+1) = \frac{2}{3}$ et $p(i,i-1) = \frac{1}{3}$. On cherche la probabilité partant de l'état 1 d'être absorbé en 6. Pour cela on utilise la question 1) avec $l = 6$ et pose $x = f(1)$. Montrer que pour $i \notin \{0,6\}$, $f(i)$ s'exprime en fonction de x. En déduire la valeur de x puis la valeur de $f(i)$ pour tout $i \notin \{0,6\}$.

Exercice 4 : On étudie en laboratoire l'évolution de la fréquence d'un certain gène A dans une population de mouches sur plusieurs générations successives. Pour cela on se fixe un entier $N > 1$ et à chaque génération, on effectue un prélèvement de N mouches sur chacunes desquelles on mesure la présence du gène A. Des expériences antérieures ont montré que si le nombre X_n de mouches de la génération n possédant le gène A est égal à i, chaque mouche de la génération $n+1$ possède le gène A avec la probabilité $\frac{i}{N}$ (indépendamment les unes des autres).

1) a) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à $N+1$ états de probabilité de transition

$$p(i,j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = C_N^j \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}, \quad (0 \leq i,j \leq N).$$

b) Justifier pourquoi cette chaîne est absorbante et indiquer ses états absorbants.

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$ (indication : en utilisant la formule de l'espérance totale relativement à un système complet bien choisi, on pourra calculer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1})$).

3) On suppose que $N = 3$.

a) Expliciter la matrice des transitions de cette chaîne, l'écrire sous forme canonique et déterminer la matrice fondamentale de la chaîne.

b) On suppose que $X_0 = 1$. Calculer la probabilité que tôt ou tard, la chaîne se trouve en l'état 0.