

# Devoir de Probabilités du 1/04/2011, Master MIMATS, durée 1H

**Avertissement** : Epreuve sans document et sans aucun appareil électronique.

**Exercice 1** : Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On pose  $Z = X + Y$ .

1) Rappeler la propriété caractéristique de  $\mathbb{E}(Y|X)$ ?. Cette variable aléatoire est-elle fonction de  $Y$ , de  $X$  ou de  $(X, Y)$ ?

2) On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et  $X$  est de loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  et  $Y$  est de loi de Bernoulli de paramètre  $p$  ( $0 < p < 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Calculer explicitement :

– a)  $\mathbb{E}(Z|X)$  et  $\mathbb{E}(Z|Y)$ .

– b)  $\mathbb{E}(Z^2|X)$ .

– c)  $\mathbb{E}(X|Z)$  (indication : pour  $\omega \in [Z = k]$ , on calculera la valeur de  $\mathbb{E}(X|Z)(\omega)$ ).

**Exercice 2** : On considère un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  et de loi uniforme dans le triangle de sommets  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

1) Calculer la densité de  $X$ .

2) Calculer explicitement l'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}(Y|X)$ .

3) Calculer explicitement  $\mathbb{E}(Y^2|X)$ .