

Rappels sur les espaces vectoriels normés

*

26 février 2008

Résumé

Ce document contient sans démonstration les principaux résultats sur les espaces vectoriels normés dont on a toujours besoin, à l'exception de questions topologiques spéciales comme la compacité ou la connexité. Il servira de vade-mecum pour le cours Espaces de Hilbert du L3 de mathématiques.

1 Généralités sur les espaces vectoriels normés

1.1 Norme, distance et topologie

Définition 1.1 : Un espace normé $(V, \|\cdot\|)$ sur le corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un espace vectoriel V sur \mathbb{K} muni d'une application $x \mapsto \|x\|$ de V dans \mathbb{R}_+ (appelée norme) telle que

1) $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$.

2) $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

3) $\forall x, y \in V, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

L'application $(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$ de $V \times V$ dans \mathbb{R}_+ est la distance associée à la norme $\|\cdot\|$

Définition 1.2 : 1) On appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre $x \in V$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B(x, r) = \{y \in V; \|x - y\| < r\} \text{ (resp. } \bar{B}(x, r) = \{y \in V; \|x - y\| \leq r\}).$$

2) Un ensemble $O \subset V$ est ouvert si pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$.

3) Un ensemble $F \subset V$ est fermé si son complémentaire $F^c = V \setminus F$ est ouvert.

4) L'intérieur de $A \subset V$ est le plus grand ouvert A° inclus dans A .

5) L'adhérence \bar{A} de $A \subset V$ est le plus petit fermé contenant A .

6) La famille de tous les ensembles ouverts de V s'appelle la topologie de V .

1.2 Topologie et convergence des suites

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé et $(x^{(n)})$ une suite de vecteurs de V (par abus de notation on écrira $(x^{(n)}) \subset V$).

*cours d'Espaces de Hilbert de M. L. Gallardo, Université de Tours, année 2007-2008.

Définition 1.3 : On dit que $(x^{(n)})$ converge vers $x \in V$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\| = 0,$$

autrement dit

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x^{(n)} - x\| \leq \epsilon.$$

Dans ce cas on écrira pour abrégé $x^{(n)} \rightarrow x$ dans V et on dira aussi que $\lim x^{(n)} = x$.

La convergence des suites est un outil fondamental, par exemple pour montrer qu'un ensemble est fermé ou qu'une application est continue :

Proposition 1.4 : 1) Un ensemble $F \subset V$ est fermé si et seulement si toute suite $(x^{(n)}) \subset F$ qui converge, a sa limite qui appartient à F .

2) L'adhérence d'un ensemble $A \subset V$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui sont des limites de suites $(x^{(n)})$ d'éléments de A i.e.

$$\bar{A} = \{x \in V \mid \exists (x^{(n)}) \subset A, \lim x^{(n)} = x\}$$

Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces normés et $f : V \rightarrow W$ une application.

Définition 1.5 : On dit que f est continue en $x \in V$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $y \in V$ et $\|y - x\|_V \leq \eta$ implique $\|f(y) - f(x)\|_W \leq \epsilon$.

Proposition 1.6 : f est continue en $x \in V$ si et seulement si pour toute suite $(x^{(n)}) \subset V$ telle que $\lim x^{(n)} = x$, on a $\lim f(x^{(n)}) = f(x)$ dans W .

Remarque : La négation de la continuité s'exprime comme suit : f n'est pas continue en $x \in V$ s'il existe une suite $(x^{(n)}) \subset V$ telle que la suite $(f(x^{(n)}))$ ne converge pas vers $f(x)$ dans W .

1.3 Espace normé produit et continuité des opérations algébriques

Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces normés sur le même corps \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Définition 1.7 : On appelle espace normé produit $(V \times W, \|\cdot\|_{V \times W})$ l'espace vectoriel $V \times W$ des couples $(x, y) \in V \times W$ avec $x \in V$ et $y \in W$, muni des opérations usuelles

$$(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

et avec la norme

$$\|(x, y)\|_{V \times W} = \max(\|x\|_V, \|y\|_W).$$

Proposition 1.8 : Une suite $((x^{(n)}, y^{(n)})) \subset V \times W$ converge vers $(x, y) \in V \times W$ si et seulement si

$$x^{(n)} \rightarrow x \quad \text{dans } V \quad \text{et} \quad y^{(n)} \rightarrow y \quad \text{dans } W.$$

La continuité des opérations algébriques est l'un des résultats les plus utiles dans la pratique élémentaire des espaces normés. Soit $(V, \|\cdot\|_V)$ un espace normé. Dans la suite nous considérerons les espaces normés produit $V \times V$ et $\mathbb{K} \times V$, où \mathbb{K} est muni de la norme $|\cdot|$ (valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Théorème 1.9 : *Les applications*

- 1) $(x, y) \mapsto x + y$ de $V \times V$ dans V ,
 - 2) $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{C} \times V$ dans V ,
 - 3) $x \mapsto \|x\|$ de V dans \mathbb{R}_+ ,
- sont continues.

Pour illustrer la simplicité de l'utilisation des suites dans les raisonnements de continuité, voici la démonstration du point 1) :

Soit $((x^{(n)}, y^{(n)})) \subset V \times V$ une suite quelconque tendant vers (x, y) . On doit montrer que $\lim(x^{(n)}, y^{(n)}) = (x+y)$ et donc on procède de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} + y^{(n)} - (x + y)\| &= \|(x^{(n)} - x) + (y^{(n)} - y)\| \\ &\leq \|x^{(n)} - x\| + \|y^{(n)} - y\| \\ &\leq 2 \max(\|x^{(n)} - x\|, \|y^{(n)} - y\|) \\ &= 2 \|(x^{(n)}, y^{(n)}) - (x, y)\|_{V \times V} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow +\infty$ par hypothèse. D'où le résultat. Vous êtes invités à démontrer les autres points de la même façon.

Exemple : Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces normés et $f : V \rightarrow W$ un application continue. Alors l'application $(x, y) \mapsto f(x + y)$ de $V \times V$ dans W est continue comme composée de l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$ de $V \times V$ dans V et de l'application f .

1.4 Les espaces normés de dimension finie

On considère toujours un espace vectoriel V sur \mathbb{K} .

Définition 1.10 : *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur V sont dites équivalentes s'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que*

$$\forall x \in V, C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1.$$

Proposition 1.11 : *Deux normes équivalentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur V déterminent la même topologie, c'est à dire les mêmes ensembles ouverts. De manière équivalente les suites convergent de la même façon avec la norme $\|\cdot\|_1$ avec la norme $\|\cdot\|_2$.*

Le résultat suivant est fondamental :

Théorème 1.12 : *Si V est de dimension finie, toutes les normes sur V sont équivalentes.*

Remarque : Ce résultat est surtout utile dans sa version contraposée, c'est à dire que s'il existe sur V deux normes non-équivalentes alors V est de dimension infinie.

Exemples : Tout espace vectoriel V sur \mathbb{K} de dimension finie d est isomorphe (algébriquement) à $\mathbb{K}^d = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ (d fois) mais un espace de dimension finie peut se présenter sous d'autres formes intéressantes par exemple l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n \times m}$ des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans \mathbb{K} . Cet espace est de dimension $d = nm$.

1.5 Applications linéaires continues

Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces normés sur \mathbb{K} .

Définition 1.13 : Une application $f : V \rightarrow W$ est linéaire si

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Théorème 1.14 : Soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) f est continue sur V (i.e. continue en tout point de V).
- 2) f est continue en $x = 0$.
- 3) Il existe une constante $C > 0$ telle que $x \in V$ et $\|x\|_V \leq 1$ implique $\|f(x)\|_W \leq C$ (i.e. f est bornée sur la boule unité fermée de V).
- 4) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in V, \|f(x)\|_W \leq C \|x\|_V.$$

Définition 1.15 : soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire continue, on appelle norme de f , le nombre

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|f(x)\|_W$$

On remarquera qu'il est tel que :

$$\forall x \in V, \|f(x)\|_W \leq \|f\| \|x\|_V.$$

Ce nombre $\|f\|$ dépend des normes de V et W . Pour insister, on dit parfois que c'est la norme de f assujettie aux normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$.

La terminologie de norme est justifiée par le résultat suivant :

Proposition 1.16 : L'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(V, W)$ des applications linéaires continues de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(W, \|\cdot\|_W)$.

Définition 1.17 : L'espace $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ des applications linéaires continues¹ de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ muni de la norme assujettie aux normes $\|\cdot\|_V$ et $|\cdot|$ est appelé le dual de V . Il est généralement noté V^* .

1.6 Espaces normés complets

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé.

Définition 1.18 : Une suite $(x^{(n)}) \subset V$ est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N (\in \mathbb{N}), n, m \geq N \Rightarrow \|x^{(n)} - x^{(m)}\| \leq \epsilon.$$

¹qu'on appelle dans ce cas particulier «formes linéaires».

Proposition 1.19 : Une suite qui converge est une suite de Cauchy.

Remarque : Une suite de Cauchy n'est pas forcément convergente. Cependant les espaces où toute suite de Cauchy converge sont particulièrement importants.

Définition 1.20 : Un espace normé $(V, \|\cdot\|)$ est dit **complet** (ou encore espace de **Banach**) si toute suite de Cauchy de V est convergente.

Exemple : L'espace \mathbb{K} des scalaires est un espace de Banach.

Théorème 1.21 : Soient $(V_1, \|\cdot\|_1), \dots, (V_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces de Banach. Alors l'espace vectoriel produit $V = V_1 \times \dots \times V_n$ muni de la norme produit

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|_k,$$

est un espace de Banach.

Corollaire 1.22 : L'espace \mathbb{K}^d ($d \in \mathbb{N}^*$) est un espace de Banach². Plus généralement tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach.

Théorème 1.23 : Si $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace normé et $(W, \|\cdot\|_W)$ un espace de Banach, alors l'espace $\mathcal{L}(V, W)$ des applications linéaires continues de V dans W muni de la norme «assujettie» $\|f\|$, est un espace de Banach.

Théorème 1.24 : Si $(V, \|\cdot\|)$ est complet, toute série $\sum_n x^{(n)}$ de vecteurs de V qui est normalement convergente (i.e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x^{(n)}\| < +\infty$), est convergente dans V (i.e. il existe $s \in V$ tel que $\sum_{k=1}^n x^{(k)} \rightarrow s$ dans V et on écrit alors $s = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{(k)}$).

Remarque 1 : Le résultat précédent est particulièrement utile car dans la pratique on ne dispose en fait que d'une méthode générale pour démontrer qu'une série converge dans un espace normé ; c'est de pouvoir montrer que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x^{(n)}\|$ est convergente. D'où l'utilité de savoir si l'espace est complet.

Remarque 2 : En fait le théorème précédent a une réciproque. Précisément, si $(V, \|\cdot\|)$ est un espace normé tel que toute série normalement convergente converge dans V , alors l'espace $(V, \|\cdot\|)$ est complet.

1.7 Exemples d'espaces de Banach

Il est important de connaître un certain nombre d'exemples typiques d'espaces de Banach.

Exemple 1 : Les espaces normés de dimension finie sont complets (déjà vu).

Exemple 2 : Le dual V^* d'un espace normé (quelconque) $(V, \|\cdot\|)$, est toujours un espace de Banach d'après le théorème 1.23 .

Exemple 3 : L'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{R})$ (resp. $C([a, b], \mathbb{C})$) des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) continues sur l'intervalle compact $[a, b]$ ($a < b$ réels) muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

²pour n'importe quelle norme.

est un espace de Banach. Attention, avec une autre norme cet espace **n'est pas forcément complet** par exemple avec la norme

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

l'espace n'est pas complet (voir les exercices du cours espaces de Hilbert).

Exemple 4 : Soit $p \geq 1$ un réel et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ numériques³. Le sous espace

$$l^p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty \right\}$$

des suites de puissance p -ième sommable, muni de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

est un espace de Banach.

Exemple 5 : Le sous espace l^∞ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bornées (i.e. $\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < +\infty$) muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|,$$

est un espace de Banach.

Exemple 6 : Soit un réel $p \geq 1$. L'espace vectoriel des classes de fonctions boréliennes $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ (resp. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$) telles que $|f|^p$ est intégrable (pour la mesure de Lebesgue) avec la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (\text{resp.} \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}),$$

est un espace de Banach qu'on note $L^p([a, b])$ (resp. $L^p(\mathbb{R})$). Cet exemple important sera étudié dans le cours d'intégration 2.

Bibliographie :

Arnaudiès J.M., Lelong-Ferrand J. : cours de mathématiques t.2 : Analyse. Dunod éditeur. (bon niveau ancien Deug, livre très bien écrit).

Dieudonné J. : Éléments d'Analyse, t.1 : fondements de l'Analyse moderne. Gauthier-Villars éditeur. (niveau élevé, grande élégance mathématique, peut être utilisé tout au long des études et surtout pour la préparation à l'Agrégation).

Kolmogorov A., Fomine S. : Éléments de la théorie des fonctions et de l'Analyse fonctionnelle. Ellipses éditeur. (bon livre pour l'Analyse pouvant servir tout au long des études de mathématiques ; niveau assez élevé mais très accessible).

Young N. : An introduction to Hilbert spaces. Cambridge University Press. (niveau très accessible, convient au cours sur les espaces de Hilbert).

³réelles si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.