

Chapitre 1:

Introduction au calcul des probabilités, cas d'un univers fini.

*

1 Introduction

Des actions comme lancer un dé, tirer une carte d'un jeu, observer la durée de vie d'une ampoule électrique, etc...sont des *expériences aléatoires*. Leur résultat n'est connu que lorsque l'expérience aléatoire a pris fin. On peut cependant envisager *a priori* des *éventualités* (des résultats possibles) mais seule la fin de l'expérience nous permet de savoir si telle éventualité est réalisée ou non. Un événement est un ensemble d'éventualités qui est réalisé si l'une de ces éventualités est réalisée. Dans une expérience aléatoire certains événements sont plus probables que d'autres; d'où l'idée de chiffrer les chances qu'a un événement de se produire. Cette idée trouve une justification expérimentale connue sous le nom de *loi empirique des grands nombres* :

Soit A un événement relatif à une certaine expérience aléatoire (par exemple A ="sortir pile" quand on joue à pile ou face). Répétons N fois (dans les mêmes conditions expérimentales) l'expérience aléatoire et soit N_A le nombre de fois où A s'est réalisé au cours des N essais. On constate que le rapport $f_A = \frac{N_A}{N}$ appelé *fréquence* de l'événement A , reste pratiquement constant pour N assez grand, de sorte qu'on peut considérer ce nombre comme une caractéristique intrinsèque de l'événement A . Dans le cas de l'exemple, pour une pièce correcte, on constate que $f_A \cong 0,5$ dès que N est assez grand.

2 Expérience aléatoire et événements

2.1 Définitions

Il est naturel de représenter une expérience aléatoire par l'ensemble de toutes ses éventualités (qu'on suppose pour l'instant en nombre fini). Par exemple lancer un dé peut se représenter par l'ensemble

$$(1) \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

*Notes du cours de Probabilités de M1 de M. L. Gallardo, Université de Tours, année 2008-2009. Les démonstrations sont détaillées dans le cours oral.

Un *événement* est un ensemble d'éventualités ; par exemple "il sort un nombre pair" est représenté par le sous-ensemble $A = \{2, 4, 6\}$.

L'ensemble des éventualités autres que celles de A est un événement appelé *contraire* de A ; il est noté \bar{A} . Toujours avec le même exemple, $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.

Deux événements A et B peuvent avoir des éventualités en commun. L'ensemble des éventualités communes à A et B constitue un événement noté $A \cap B$ et appelé *conjonction* des événements A et B . Avec l'exemple ci-dessus, si $A =$ "il sort un nombre pair" = $\{2, 4, 6\}$ et $B =$ "il sort un nombre supérieur ou égal à 4" = $\{4, 5, 6\}$, on a $A \cap B = \{4, 6\}$.

Si on réunit les éventualités de deux événements A et B , on obtient un événement appelé événement A ou B ¹ et noté $A \cup B$. Toujours avec l'exemple précédent, on a $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

2.2 Réalisation d'un événement

On dit que l'événement A s'est réalisé si et seulement si l'une des éventualités constituant A s'est réalisée. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} A \text{ réalisé} &\iff \bar{A} \text{ non réalisé} \\ A \cap B \text{ réalisé} &\iff A \text{ réalisé et } B \text{ réalisé} \\ A \cup B \text{ réalisé} &\iff A \text{ réalisé ou } B \text{ réalisé} \end{aligned}$$

3 Expérience aléatoire probabilisée

Définition 3.1 : Si une expérience aléatoire est schématisée par un ensemble fini Ω appelé *univers des possibles*, alors :

- les éléments de Ω sont appelés *éventualités*.
- les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω sont appelés *événements*.

Remarque 3.2 : Désormais on considérera un événement comme un sous-ensemble de Ω sans faire référence à sa réalisation ou sa non-réalisation. Les opérations ensemblistes \cap , \cup et $\bar{}$ trouvent alors une interprétation en termes d'événements. On utilisera le vocabulaire suivant :

écriture ensembliste	formulation probabiliste
Ω	événement certain
\emptyset	événement impossible
$A (\in \mathcal{P}(\Omega))$	événement A
\bar{A}	événement non A
$A \cap B$	événement A et B
$A \cup B$	événement A ou B
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A implique B

¹attention, il s'agit du «ou» mathématique, c'est à dire le «ou» non exclusif.

Remarque 3.3 : Soit $N > 0$ un entier fixé. Notons f_A la fréquence de l'événement A au cours de N répétitions successives de l'expérience aléatoire (voir le §1). On voit immédiatement que l'application $A \mapsto f_A$ possède les deux propriétés suivantes :

- 1) $f_\Omega = 1$
- 2) $A \cap B = \emptyset \implies f_{A \cup B} = f_A + f_B$.

Les axiomes des probabilités sont calqués sur ces propriétés de la fréquence.

Définition 3.4 : L'univers fini Ω est probabilisé si à chaque événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est associé un nombre $\mathbb{P}(A) \geq 0$, appelé probabilité de A de telle sorte que pour $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

- 1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- 2) $A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Le couple (Ω, \mathbb{P}) où l'application \mathbb{P} définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie les conditions ci-dessus, est appelé **espace probabilisé**.

Les propriétés immédiates de la probabilité sont les suivantes :

Proposition 3.5 : Si (Ω, \mathbb{P}) est un espace probabilisé fini, pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

- 1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- 2) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- 3) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- 4) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

De plus si A_1, \dots, A_n sont des événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Définition 3.6 : Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un espace probabilisé fini et soient $p_1 = \mathbb{P}(\omega_1), \dots, p_n = \mathbb{P}(\omega_n)$ les probabilités des éventualités de Ω . La suite des nombres $p_i, i = 1, \dots, n$ s'appelle la **distribution de probabilité** sur Ω .

Ces nombres p_i vérifient les propriétés suivantes :

- 1) $0 \leq p_i \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- 2) $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
- 3) si $A = \cup_{i \in J} \{\omega_i\}$ alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} p_i$.

Définition 3.7 : Etant donné un univers Ω , on appelle **système complet** d'événements toute partition $(A_i)_{i \in I}$ de l'ensemble Ω . Autrement dit les A_i sont des événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω .

Souvent on attache plus d'importance à un système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$ et aux événements obtenus comme réunion de certains A_i qu'aux éventualités (i.e. les éléments de Ω). Dans ce cas, on considère les A_i ($i \in I$) comme de nouvelles éventualités et on n'utilise alors que la distribution de probabilité associée aux A_i .

Exemple 3.8 : Si on joue avec deux dés un blanc et un rouge, l'expérience aléatoire peut être modélisée par l'ensemble Ω des couples (a, b) où a est le numéro obtenu avec le dé blanc et b le numéro obtenu avec le dé rouge. Autrement dit Ω est le produit cartésien

$$\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}.$$

Considérons les événements A_i , $2 \leq i \leq 12$ définis par :

A_i = "la somme des points marqués égale i "

Les A_i ($2 \leq i \leq 12$) forment un système complet d'événements. Si on ne s'intéresse qu'à la somme des points marqués, il est plus commode d'introduire un nouvel espace $\Omega' = \{A_2, A_3, \dots, A_{12}\}$ dont les nouvelles éventualités sont les A_i et la distribution de probabilité sur Ω' est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2) &= \frac{1}{36}, \mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{36}, \mathbb{P}(A_4) = \frac{3}{36}, \mathbb{P}(A_5) = \frac{4}{36}, \mathbb{P}(A_6) = \frac{5}{36}, \\ \mathbb{P}(A_7) &= \frac{6}{36}, \mathbb{P}(A_8) = \frac{5}{36}, \mathbb{P}(A_9) = \frac{4}{36}, \mathbb{P}(A_{10}) = \frac{3}{36}, \mathbb{P}(A_{11}) = \frac{2}{36}, \\ \mathbb{P}(A_{12}) &= \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Soit A l'événement "la somme des points marqués est supérieure ou égale à 10". On a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_{10}) + \mathbb{P}(A_{11}) + \mathbb{P}(A_{12}) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

4 Probabilité équilibrée

4.1 Généralités

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini, P une probabilité sur Ω , et $p_1 = \mathbb{P}(\omega_1), \dots, p_n = \mathbb{P}(\omega_n)$ la distribution de probabilité correspondante sur Ω .

Définition 4.1 : On dit que la probabilité est *équilibrée* sur Ω si $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$.

Proposition 4.2 : Si la probabilité est équilibrée sur Ω , pour tout événement A , on a $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$.

(en d'autres termes plutôt anciens, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre total de cas possibles}}$).

Exemple 4.3 : La plupart des exemples élémentaires de probabilité équilibrée ont trait aux jeux de hasard :

1) Quand on lance un dé, quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 4 (événement A) ? L'expérience aléatoire se modélise par l'ensemble $\Omega = \{1, \dots, 6\}$. Si le dé n'est pas truqué, il est naturel d'admettre qu'aucune face n'est privilégiée donc que la probabilité est équilibrée. On a donc $\mathbb{P}(A) = p_5 + p_6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2) En tirant une carte d'un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité d'obtenir un as (événement A) ? L'expérience a ici 32 éventualités chacune équiprobable. Donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

3) Si on tire successivement 3 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans remise)

quelle est la probabilité d'obtenir 3 as (événement A) ? Ici la réponse dépend d'une modélisation convenable de l'expérience aléatoire consistant à tirer 3 cartes sans remise. Sa solution est étudiée dans le paragraphe suivant.

4.2 Tirages sans remise

Les tirages sans remise interviennent si souvent dans les modèles probabilistes qu'il convient que le débutant ait des idées claires sur cette question. Soit E un ensemble de N objets (par exemple des cartes ou d'autres choses).

Par définition «tirer un objet au hasard dans E » est une expérience aléatoire probabilisée qu'on modélise par l'espace $\Omega = E$ (car les éventualités sont les divers objets qu'on peut «tirer» de l'ensemble E qu'on assimile à un sac dans lequel on va plonger le main pour en tirer un objet) et on suppose que la probabilité est équilibrée sur Ω (c'est ce qui justifie le terme tirer au hasard, ce qui suppose que les objets ont été bien mélangés dans le sac E et que chaque objet a la même probabilité d'être choisi).

Supposons qu'il y ait dans E un nombre N_C d'objets possédant une certaine caractéristique C alors **la probabilité de tirer un objet de type C** est égale à $\frac{N_C}{N}$ c'est à dire c'est **la proportion d'objets de type C** dans E .

Si maintenant on tire au hasard successivement r objets sans remise dans E ($1 < r \leq N$) (i.e. on tire un objet dans E puis un deuxième dans E , etc... mais à chaque fois sans remettre les différents objets déjà tirés). Comment modéliser cette expérience aléatoire ? :

On convient de ne s'intéresser qu'aux r objets tirés et non à l'ordre dans lequel ils ont été tirés (autrement dit tout se passe comme si on avait tiré les r objets d'un seul coup dans E). Tout sous ensemble de E à r éléments est une éventualité. On modélise donc l'expérience aléatoire «tirer r objets dans E sans remise» par l'espace

$$\Omega = \{F \in \mathcal{P}(E); \text{card}F = r\}$$

de toutes les parties de E ayant r éléments. On sait depuis le lycée que $\text{card}\Omega = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Par définition (de "au hasard") on suppose que la probabilité est équilibrée sur Ω , c'est à dire que chaque éventualité a pour probabilité $\frac{1}{C_n^r}$.

Ainsi si on tire au hasard 3 cartes (sans remise) d'un jeu de 32 la probabilité d'obtenir 3 as (événement A) est égale à

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}A}{C_{32}^3} = \frac{C_4^3}{C_{32}^3} = \frac{4}{4960} = \frac{1}{1240} \cong 0,0008.$$

La probabilité d'obtenir au moins un valet (événement B) (en tirant toujours 3 cartes), vaut

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{28}^3}{C_{32}^3} = 1 - \frac{819}{1240} = \frac{421}{1240}.$$