Espaces Métriques, Session 2 Lundi 7 juin 2010.

Ex1 Partie A 1) $x \in \ell^1$ signifie que la série $\sum x_n$ est absolument convergente donc elle est convergente puisque $\mathbb{R}$ est complet. Sa somme $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est donc un nombre réel bien défini.

2) L'application ϕ est linéaire : $\forall x, y \in \ell^1$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$ (linéarité de la somme des séries convergentes). Elle est continue puisque

$$\forall x \in \ell^1, \ |\phi(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1,$$

inégalité qui prouve que $|||\phi||| \leq 1$. De plus pour $x = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ on a $|\phi(x)| = 1$ et $\|x\|_1 = 1$. Donc $|||\phi||| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |\phi(x)| \geq 1$. Les 2 inégalités impliquent $|||\phi||| = 1$.

3) $x \mapsto (\phi(x))^2$ de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$ est la composée des applications $x \mapsto \phi(x)$ de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$ et $X \mapsto X^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues. Donc $x \mapsto (\phi(x))^2$ est continue.

Cette application n'est pas lipschitzienne car pour $x \in \ell^1$ et $y = \lambda x$ (λ scalaire), on a :

$$|(\phi(x))^2 - (\phi(y))^2| = |(\phi(x))^2 - \lambda^2 (\phi(x))^2| = |1 - \lambda^2| (\phi(x))^2$$

S'il existait une constante $k > 0$ telle que : $\forall x, y \in \ell^1$, $|\phi^2(x) - \phi^2(y)| \leq k \|x - y\|_1$, on aurait

$$|1 - \lambda^2| (\phi(x))^2 \leq k \|x - \lambda x\|_1 = k |1 - \lambda| \|x\|_1$$

D'où $|1 + \lambda| (\phi(x))^2 \leq k \|x\|_1$ pour tout $\lambda > 0$; c'est absurde si on fait $\lambda \to +\infty$. D'où le résultat

4) a) prenons $x^{(n)} = (n, -n, 1, 0, \dots, 0, \dots)$. On a $x^{(n)} \in \ell^1$ et $\phi(x^{(n)}) = 1$ donc $x^{(n)} \in A$. Mais

$$\|x^{(n)}\|_1 = 2n + 1 \longrightarrow +\infty \text{ si } n \to +\infty.$$

D'où $\sup_{x \in A} \|x\|_1 = +\infty$.

b) L'ensemble A n'est pas borné donc il n'est pas compact

Partie B : posons $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$.

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| \Longrightarrow \sup_{n \geq 1} |x_n| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| < +\infty$ car $x \in \ell^1$.

On sait de plus que $x \mapsto \|x\|_\infty$ est une norme : on l'a vu à de nombreuses reprises : $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty$ et $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Alors $N(x) = \|x\|_1 + \|x\|_\infty$ est la somme de deux normes sur ℓ^1 donc c'est aussi une norme. Vérifions le rapidement ; $\forall x, y \in \ell^1$, on a :

$$\begin{aligned} N(x+y) = \|x+y\|_1 + \|x+y\|_\infty &\leq \|x\|_1 + \|y\|_1 + \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \\ &\leq \|x\|_1 + \|x\|_\infty + \|y\|_1 + \|y\|_\infty \\ &\leq N(x) + N(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ N(\lambda x) = \|\lambda x\|_1 + \|\lambda x\|_\infty &= |\lambda| \|x\|_1 + |\lambda| \|x\|_\infty \\ &= |\lambda| N(x). \end{aligned}$$

Enfin si $N(x) = 0 = \|x\|_1 + \|x\|_\infty$, on a $\|x\|_1 = 0$ donc $x = 0$. Ce qui montre que N vérifie les 3 propriétés d'une norme.

6) a) $\forall x \in \ell^1$, on a clairement $\|x\|_1 \leq N(x)$ (car $\|x\|_\infty \geq 0$)

De plus comme $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$, on a aussi $N(x) \leq 2\|x\|_1$ donc $\frac{1}{2} N(x) \leq \|x\|_1$. Ainsi

$$\frac{1}{2} N(x) \leq \|x\|_1 \leq N(x) \quad (\forall x \in \ell^1) \quad (*)$$

$\Rightarrow \|\cdot\|_1$ et N sont des normes équivalentes.

b) l'espace $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est complet. Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme N :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ tq } n,m \geq K_\varepsilon \Rightarrow N(x^{(n)} - x^{(m)}) \leq \varepsilon$$

Par la propriété $(*)$ on a aussi $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_1 \leq \varepsilon$ donc la suite $(x^{(n)})$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_1$. Par suite elle converge vers une limite $x \in \ell^1$:

$$\|x^{(n)} - x\|_1 \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

A nouveau l'équivalence des normes $(*)$ implique que

$N(x^{(n)} - x) \to 0$ i.e. $x^{(n)} \to x$ pour la norme N.

Donc (ℓ^1, N) est complet.

7) $\forall x \in \ell^1$, $|\phi(x)| \leq \|x\|_1 \leq N(x)$ donc ϕ est continue quand on munit ℓ^1 de la norme N et on a

$$|||\phi|||_N \leq 1 \quad \left(\text{on note } |||\phi|||_N = \sup_{N(x)\leq 1} |\phi(x)|\right)$$

Il n'y a pas de point x évident tel que $N(x) \leq 1$ et $|\phi(x)| \geq 1$. Aussi il faut trouver une suite maximisante :

pour $x^{(1)} = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ $N(x) = 2$ et $|\phi(x^{(1)})| = 1$

$x^{(2)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots)$ $N(x) = \frac{3}{2}$ et $|\phi(x^{(2)})| = 1$

$x^{(3)} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0, \dots)$ $N(x) = \frac{4}{3}$ et $|\phi(x^{(3)})| = 1$

$\vdots$

$x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots)$ $N(x) = 1 + \frac{1}{n}$ et $|\phi(x^{(n)})| = 1$

posons $y_n = \dfrac{x^{(n)}}{N(x^{(n)})}$ alors $N(y_n) = 1$ et $|\phi(y^{(n)})| = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ (si $n \to +\infty$)

$\Rightarrow |||\phi|||_N \geq 1$. D'où $|||\phi|||_N = 1$.

Exercice 2 :

1) A n'est pas compact car il n'est pas borné : en effet $(\frac{1}{n}, n, 1) \in A$ et $\|(\frac{1}{n}, n, 1)\| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + n^2 + 1} \to +\infty$ si $n \to +\infty$

2) B n'est pas compact car il n'est pas borné :
$(n, -n, 1) \in B$ et $\|(n, -n, 1)\| = \sqrt{2n^2+1} \to +\infty$ si $n \to +\infty$

3) C est borné car $x^4 + y^2 + |z| = 1 \Rightarrow x^4 \leq 1$, $y^2 \leq 1$ et $|z| \leq 1$
$\Rightarrow |x| \leq 1, |y| \leq 1$ et $|z| \leq 1$ donc $\|(x,y,z)\| \leq \sqrt{3}$.

C est fermé car c'est l'image inverse du singleton $\{1\}$ (qui est un fermé de $\mathbb{R}$) par l'application $f : (x,y,z) \mapsto x^4 + y^2 + |z|$ qui continue car somme des 3 applications continues : $f_1 : (x,y,z) \mapsto x^4$

$f_2 : (x,y,z) \mapsto y^2$

$f_3 : (x,y,z) \mapsto |z|$

Les compacts de $\mathbb{R}^3$ sont les fermés bornés (thm du cours) donc C est compact.

2) $(x,y) \in D \Leftrightarrow x+y = 1$ ou $x+y = -1$. Donc

$D = D_1 \cup D_2$ où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x+y = 1\}$

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x+y = -1\}$. D est réunion de 2 droites parallèles D_1 et D_2 donc D n'est pas connexe et a 2 composantes connexes D_1 et D_2.

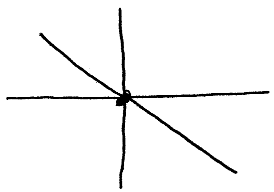
b) $(x,y) \in E \Leftrightarrow xy = 0$ ou $x+y = 0$. Donc

$E = E_1 \cup E_2$ avec $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 0\}$ et

$E_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x+y=0\}$. De plus $E_1 = E_1' \cup E_2''$ où

$E_1' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x=0\}$, $E_2' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; y=0\}$

Donc $E = E_1' \cup E_2' \cup E_2''$ réunion de 3 droites :

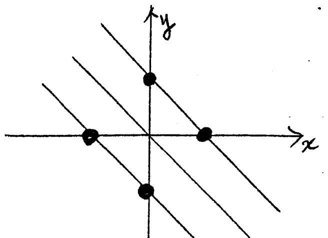


Or ces 3 droites ont un point commun (l'origine) donc

$E_1' \cap E_2' \cap E_2'' \neq \emptyset$

Alors E est connexe comme réunion de 3 connexes d'intersections non vide.

c) $F = E \cap D$ = ensemble fini composé de 4 points : F n'est pas connexe, il y a 4 composantes connexes toutes réduites à un point.



3) a) $f : (x,y) \longmapsto (ax, by)$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

car $a\neq 0$ et $b\neq 0 \Rightarrow \forall (X,Y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} ax = X \\ by = Y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{X}{a} \\ y = \frac{Y}{b} \end{cases}$

ce qui montre que f est bijective et que

$f^{-1} : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$.

De plus f et f^{-1} sont continues puisque les applications coordonnées sont polynomiales. Donc f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.

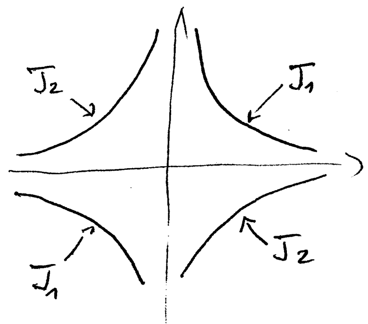
b) $(x,y)\in H \iff f(x,y)\in G$ donc $f(H) = G$.

l'application f transforme l'espace H en l'espace G.
La restriction $\tilde{f} = f_{|H}$ de f à H est donc un homéomorphisme de H sur G (Thm de restriction des homéomorphismes).

c) $J = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; x^2y^2 = 1\} = J_1 \cup J_2$ où

$J_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; xy = 1\}$, $J_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; xy = -1\}$

J est réunion de 4 branches d'hyperboles :



A fortiori J n'est pas connexe et ne peut pas être homéomorphe à G qui est connexe (cercle) car d'après un théorème du cours, les applications continues transforment les connexes en connexes donc si on avait $J = h(G)$ avec h homéomorphisme, on devrait avoir J connexe, ce qui n'est pas. G et J ne sont donc pas homéomorphes.