

## Contrôle continu du mercredi 19 mars 2008

## Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto f(x)$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, 1]$  et à valeurs dans  $[0, 1]$ . On considère deux variables aléatoires  $U$  et  $V$  indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0, 1]$  et on leur associe la variable aléatoire  $Z$  telle que

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } V \leq f(U) \\ 0 & \text{si } V > f(U) \end{cases}$$

- 1) Déterminer précisément la loi de  $Z$ .
- 2) On considère un échantillon de taille  $n$   $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$  du couple  $(U, V)$  et l'échantillon associé  $Z_1, \dots, Z_n$  des valeurs de  $Z$  correspondantes. La suite

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

est-elle convergente, en quel sens et vers quelle limite ?

- 3) En déduire une méthode de simulation pour trouver la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- 4) Soit  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  une autre fonction continue. Montrer qu'avec le même échantillon  $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ , on peut construire un autre échantillon  $Z'_1, \dots, Z'_n$  de variables aléatoires qu'on précisera et qui permettent d'estimer la valeur de  $\int_a^b g(x)dx$ .
- 5) En utilisant un table de nombres au hasard et à partir d'un 20-échantillon observé de la loi du couple  $(U, V)$ , qu'obtient-on comme valeur de l'intégrale  $\int_0^1 x^2 dx$  ? (on utilisera des nombres au hasard de  $[0, 1]$  à 4 décimales).

## Exercice 2

- 1) On considère deux échantillons indépendants

$$X = (X_1, \dots, X_{n_1}) \quad \text{et} \quad X' = (X'_1, \dots, X'_{n_2})$$

et issus de la même loi de probabilité de fonction de répartition  $F$  (c'est à dire si les variables aléatoires  $X_i$  et  $X'_j$  ( $1 \leq i \leq n_1$  et  $1 \leq j \leq n_2$ ) ont la même loi  $F$ . On dit dans ce cas que  $X$  et  $X'$  sont homogènes).

Soient  $F_{n_1}^\omega$  et  $G_{n_2}^\omega$  les fonctions de répartition empiriques respectives de  $X$  et  $X'$ . On considère alors la variable aléatoire

$$D_{n_1, n_2}(\omega) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{n_1}^\omega(x) - G_{n_2}^\omega(x)|,$$

qui mesure l'écart uniforme entre les deux fonctions de répartition empiriques.

Démontrer que si  $F$  est continue, la loi de  $D_{n_1, n_2}$  est une loi intrinsèque (c'est à dire qu'elle ne dépend pas de  $F$ ) (indication : On pourra s'inspirer du cas analogue de la statistique  $D_n$  de Kolmogorov-Smirnov vue en cours, en transformant les échantillons par la fonction  $F$ ). La loi de  $D_{n_1, n_2}$  est tabulée, on l'appelle la variable de Kolmogorov-Smirnov pour 2 échantillons.

2) Expliquer pratiquement comment on calcule la valeur de  $D_{n_1, n_2}(\omega)$  à partir des échantillons observés  $x_1 = X_1(\omega), \dots, x_{n_1} = X_{n_1}(\omega)$  et  $x'_1 = X'_1(\omega), \dots, x'_{n_2} = X'_{n_2}(\omega)$ .

3) On dispose de 2 échantillons indépendants  $X$  et  $X'$  qu'on pense être issus d'une même loi continue  $F$  (hypothèse  $H_0$ ). Expliquer comment on peut tester l'homogénéité de  $X$  et  $X'$ , c'est à dire comme on peut tester l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse alternative  $H_1 = \text{non } H_0$  à un niveau de confiance donné  $\alpha \in ]0, 1[$

a) Si on ne connaît pas  $F$ .

b) Si on connaît la loi  $F$ .

(on notera  $d_{n_1, n_2, \alpha}$  le nombre tel que  $\mathbb{P}(D_{n_1, n_2} \geq d_{n_1, n_2, \alpha}) = \alpha$  qui est en principe donné par la table de la loi de  $D_{n_1, n_2}$ )

### Exercice 3

Une étude réalisée sur 320 familles de 5 enfants a montré les résultats suivants

nb de garçons	5	4	3	2	1	0
nb de filles	0	1	2	3	4	5
nb de familles	18	56	110	88	40	8

1) Sous l'hypothèse  $H_0$  qu'à chaque naissance, la naissance d'une fille ou d'un garçon sont équiprobables, et que les différentes naissances sont des événements indépendants, calculer les probabilités des différentes compositions possibles d'une famille de 5 enfants.

2) Les résultats de l'étude menée sur les 320 familles, sont-ils en adéquation avec l'hypothèse  $H_0$ ? (On donnera les résultats aux niveaux de confiance 0,95 puis 0,99).