Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2007-2008**

Master 1 de Mathématiques **Lundi 28 avril 2008**

Épreuve de Statistiques (Durée : 3 heures)

Les téléphones et ordinateurs portables sont interdits.
Les documents pédagogiques et les calculatrices sont autorisés.

Partie I (pour tous les candidats)

Question 1 : Une table de nombres au hasard constituée de 250 chiffres a donné les résultats suivants pour les différents chiffres de 0 à 9. Au niveau de confiance $1-\alpha = 0,95$ et $0,99$, peut-on dire si la table est bonne ou si elle doit être considérée comme défectueuse ?

chiffres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
effectif observé	17	31	29	18	14	20	35	30	20	36

Question 2 : Dans un institut de recherche agronomique, on désire tester l'effet d'un engrais sur la production de blé. On choisit donc 24 parcelles de terrain de même superficie qu'on ensemence de blé . La moitié de chaque parcelle est traitée avec l'engrais et l'autre moitié ne l'est pas. Au moment de la récolte on constate que la moyenne empirique de blé obtenue sur les 24 demi-parcelles non traitées est $\overline{X} = 4,8$ tonnes avec un écart type empirique $S_1 = 0,40$ tonne alors que la moyenne obtenue sur les 24 demi-parcelles traitées avec l'engrais, est $\overline{Y} = 5,1$ tonnes avec un écart type empirique de $S_2 = 0,36$ tonne.

Les rendements sont supposés suivre des lois normales. Au risque de première espèce $\alpha = 0,05$ et $0,01$, tester l'hypothèse H_0 : «L'engrais ne change rien au rendement» contre l'hypothèse H_1 : «l'engrais améliore le rendement».

Question 3 : Une entreprise fabrique des cordes dont la charge de rupture moyenne est $m = 300\ kg$ et l'écart type $\sigma = 24\ kg$. Un ingénieur prétend qu'avec un nouveau procédé de fabrication on peut augmenter la résistance de rupture moyenne (sans changer l'écart type).

1) On fait un essai du nouveau procédé portant sur 64 cordes fabriquées et on mesure la charge de rupture. Soit $\overline{X}$ la valeur moyenne des charges de rupture des 64 cordes. Trouver la valeur minimale que doit prendre $\overline{X}$ pour qu'on décide de rejeter l'ancien procédé au profit du nouveau au risque de première espèce $\alpha = 0,01$.

2) Sous les conditions de la règle de décision ci-dessus, soit β la probabilité de rejeter le nouveau procédé si sa charge de rupture moyenne est en fait égale à $310\ kg$. Montrer que $\beta = 0,1587$.
(indication : on supposera que la charge de rupture suit une loi normale. Pour la question 2) on pourra s'aider des graphiques des densités des lois $\mathcal{N}(300, 24)$ et $\mathcal{N}(310, 24)$ pour visualiser la probabilité β).

Partie II (pour les candidats à l'option statistiques du M2)

On veut comparer la production de lait de trois races de vaches laitières numérotées $i = 1, 2, 3$. Pour cela on considère un n_i-échantillon $(X_{ij})_{1\leq j\leq n_i}$ de la quantité de lait produite par des vaches de la race i qu'on suppose issu de la loi normale $N(m_i, \sigma^2)$. On considère alors le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^{n_1+n_2+n_3}$

$$X = (X_{ij})_{1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq n_i}$$

obtenu en réunissant ces 3 échantillons qu'on suppose indépendants. On introduit les variables aléatoires

$$\overline{X_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad \text{et} \quad \overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} X_{ij},$$

où $N = n_1 + n_2 + n_3$.

1) Caractériser géomètriquement la variable aléatoire

$$U = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X_i})^2$$

et déterminer explicitement sa loi de probabilité sous l'hypothèse H_0 :<< $m_1 = m_2 = m_3$ >>.

2) On considère la variable aléatoire

$$V = \sum_{i=1}^{3} n_i (\overline{X_i} - \overline{X})^2.$$

et on fait l'hypothèse H_0 :<< $m_1 = m_2 = m_3$ >>.
a) Déterminer la loi de la variable aléatoire V .
b) Montrer que U et V sont indépendantes.
c) Montrer que la variable aléatoire $Z = \frac{N-3}{2} \frac{V}{U}$ suit une loi de Fisher-Snedecor dont on déterminera les paramètres.

3) **(Question facultative)** Une observation de X a donné les valeurs suivantes :

X_{1j} : 10; 9; 8,5; 9; 9,5
X_{2j} : 10,5; 9; 10; 11; 10,5; 12
X_{3j} : 10,5; 10; 10; 12; 11

Tester au risque $\alpha = 0,05$ l'hypothèse H_0 :<< $m_1 = m_2 = m_3$ >> contre l'hypothèse alternative H_1 :<< non H_0 >>.