Solution de l'épreuve d'Espaces métriques 2e session du 17/06/11

Exercice 1 : 1) $\|P\|_1 = 0 \iff \forall k\ |a_k| = 0 \iff P = 0$

$\|\lambda P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |a_k| = |\lambda| \, \|P\|_1$

Soit $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. Supposons $m \geq n$ pour fixer les idées et posons $\underline{a_k = 0 \text{ si } k > n}$. Alors $P+Q = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) X^k$ et $\|P+Q\|_1 =$

$\sum_{k=0}^{m} |a_k + b_k| \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{m} (|a_k| + |b_k|)}$ (inégalité triangulaire pour la valeur absolue)

$\sum_{k=0}^{m} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| + \sum_{k=0}^{m} |b_k| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| + \sum_{k=0}^{m} |b_k| = \|P\|_1 + \|Q\|_1$

Donc $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur E. Le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme se démontre exactement comme dans le cas où $E = \mathcal{C}([0,\frac{1}{2}], \mathbb{R})$ (l'espace des fonctions continues définies sur $[0,\frac{1}{2}]$).

2) a) si $n \neq m$, $P_n - P_m = \sum_{k=0}^{n \vee m} a_k X^k$, où $a_k = 0$ si $k \notin \{n, m\}$ et $a_n = 1$ et $a_m = -1$. Donc $\|P_n - P_m\|_1 = |a_n| + |a_m| = 2$ donc $(P_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$ (puisque $\|P_n - P_m\|_1$ ne tend pas vers 0 quand n et $m \to +\infty$).

b) $\|P_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,\frac{1}{2}]} |x^n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et si $n \neq m$, $\|P_n - P_m\|_\infty = \sup_{x \in [0,\frac{1}{2}]} |x^n - x^m|$. Pour fixer les idées supposons $m > n$. Alors

$\|P_n - P_m\|_\infty = \sup_{x \in [0,\frac{1}{2}]} (|x^n| \, |1 - x^{m-n}|) \leq 2 \sup_{x \in [0,\frac{1}{2}]} |x^n|$ car

$|1 - x^{m-n}| \leq |1| + |x^{m-n}| \leq 2$. Donc $\|P_n - P_m\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$

et $\lim_{n,m \to +\infty} \|P_n - P_m\|_1 = 0$ ce qui montre que (P_n) est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

c) Si deux normes sont équivalentes, une suite de Cauchy pour l'une des normes, l'est aussi pour l'autre. Il résulte donc des questions a) et b) que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

3) a) $\phi : (E, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une application linéaire d'après les propriétés de linéarité de l'intégrale. De plus $\forall P \in E$, $|\phi(P)| = \left| \int_0^1 P(x)\,dx \right| = \left| \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) dx \right| =$

$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 x^k\,dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{k+1}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \frac{1}{k+1} \leq \|P\|_1$ (car $\forall k = 0, \dots, n$, on a $|a_k| \frac{1}{k+1} \leq |a_k|$). Donc $|\phi(P)| \leq \|P\|_1$ pour tout $P \in E$. Ceci montre que ϕ est continue et que $|||\phi||| \leq 1$.

b) Pour $P \equiv 1$ (polynôme constant égal à 1), on a $\phi(P) = 1$ et $\|P\|_1 = 1$ donc $\sup_{\|P\|_1 \leq 1} |\phi(P)| \geq 1$ i.e. $|||\phi||| \geq 1$.

Avec l'inégalité de la question a) on déduit que $|||\phi||| = 1$.

Exercice 2 : 1) $x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_x^\pi \sin t\, f(t)\,dt$ est la primitive de $t \mapsto -\frac{1}{2\pi} \sin t\, f(t)$ nulle en $x = \pi$ donc c'est une fonction continue. Il en résulte que $\Psi(f)$ est une fonction continue comme somme de 2 fonctions continues. Donc $\Psi : E \to E$

2) $\forall f$ et $g \in E$, on a pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$|\Psi(f)(x) - \Psi(g)(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_x^\pi \sin t \,(f(t) - g(t))\,dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_x^\pi |\sin t| \, |f(t) - g(t)|\,dt$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_x^{\pi} |f(t)-g(t)|\,dt \le \|f-g\|_\infty \frac{(\pi-x)}{2\pi} \le \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty$$

En passant au sup pour $x\in[0,\pi]$, il en résulte que

$$\|\Psi(f)-\Psi(g)\|_\infty \le \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty ,$$

ce qui montre que Ψ est une application lipschitzienne de constante $k\le\frac{1}{2}$.

Car d'après le cours $(E,\|\cdot\|_\infty)$ est complet

3) $\Psi : E\to E$ est lipschitzienne, contractante de constante $k<1$. Le théorème du point fixe de Picard nous montre alors que l'équation $\Psi(f)=f$ $(f\in E)$ a une solution unique $f\in E$.

Calcul de cette solution : l'équation $\Psi(f)(x)=f(x)$ $x\in[0,\pi]$ équivaut (par dérivation) à : $-\sin x-\frac{1}{2\pi}\sin x\, f(x)=f'(x)$ avec la condition $\Psi(f)(\pi)=f(\pi)=-1$. D'où l'E.D. :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\sin x\, f(x)-f'(x)=\sin x \quad (*)\\ f(\pi)=-1\end{cases}$$

(*) est une équation linéaire avec second membre, l'équation sans second membre s'écrit $-\frac{1}{2\pi}\sin x\, f(x)=f'(x) \iff$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{2\pi}\sin x \iff \ln(f(x))=\frac{1}{2\pi}\cos x \iff f(x)=Ce^{1/2\pi\cos x}$$

Faisons varier la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre :

$$\cancel{-\frac{1}{2\pi}\sin x\, Ce^{1/2\pi\cos x}}-C'e^{\frac{1}{2\pi}\cos x}+\cancel{C\frac{1}{2\pi}\sin x\, e^{\frac{1}{2\pi}\cos x}}=\sin x$$

$$\Rightarrow -C'e^{\frac{1}{2\pi}\cos x}=\sin x \Rightarrow C'=-\sin x\, e^{-\frac{1}{2\pi}\cos x}$$

$\Rightarrow C=-2\pi e^{-1/2\pi\cos x}$ et la fonction $x\mapsto -2\pi$ est donc solution particulière

D'où la solution générale de (*) : $f(x)=Ce^{\frac{1}{2\pi}\cos x}-2\pi$

Détermination de C : avec la condition initiale $f(\pi)=-1$, on a

$$-1=Ce^{-\frac{1}{2\pi}}-2\pi . \text{ D'où } C=(2\pi-1)e^{\frac{1}{2\pi}}.$$

La solution unique de l'équation $\Psi(f)=f$ est donc donnée par :

$$f(x)=(2\pi-1)e^{\frac{1}{2\pi}(\cos x+1)}-2\pi \quad (x\in[0,\pi]).$$

Exercice 3 : 1) $\overline{A}=A\cup\{0\}$ car $A\cup\{0\}$ est fermé (1) et c'est le plus petit fermé contenant A (2). En effet :

démonstration de (1) : Soit $y\notin A\cup\{0\}$. Alors soit $y<0$ (a), soit $y>1$ (b), soit il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n+1}<y<\frac{1}{n}$ (c). Dans les trois cas (a), (b) ou (c) il existe toujours $\varepsilon>0$ tel que $]y-\varepsilon,y+\varepsilon[\cap(A\cup\{0\})=\emptyset$. Le complémentaire de $A\cup\{0\}$ est donc ouvert d'où $A\cup\{0\}$ est fermé.

démonstration de (2) : tout fermé contenant A contient au moins $A\cup\{0\}$ car $0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ donc $0\in\overline{A}$. Ceci montre que $A\cup\{0\}$ est le plus petit fermé contenant A.

l'intérieur de $A=\mathring{A}=\emptyset$. En effet $\mathring{A}\subset A$ et pour tout $x\in\mathring{A}$ il doit exister $\varepsilon>0$ tel que $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset A$. Or pour tout $x\in A$ et tout $\varepsilon>0$, il existe des points de $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ qui n'appartiennent pas à A. En effet si $x=\frac{1}{n}$ et si on prend $\varepsilon<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ alors $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap A=\emptyset$.

b) A n'est pas connexe car si on prend $x=\frac{1}{n}\in A$ ($n>0$ quelconque mais fixé) et $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, on a

$$A=\left(\left]-\infty,\frac{1}{n+1}+\varepsilon\right[\cap A\right)\cup\left(\left]\frac{1}{n}+\varepsilon,+\infty\right[\cap A\right)$$

et $A_1 =]-\infty, \frac{1}{n+1}+\varepsilon[\cap A$

$A_2 =]\frac{1}{n}+\varepsilon, +\infty[\cap A$

Sont deux ouverts de A, non vides et disjoints.

Les composantes connexes de A sont les singletons $\{\frac{1}{n}\}, n \geq 1$ (même démonstration que celle faite dans le cours pour montrer que les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont tous les singletons $\{x\}$ avec $x \in \mathbb{Q}$.)

2) a) Soient $x \in \overline{A}$ et $y \in \overline{A}$. On sait qu'il existe une suite (x_n) de points de A et une autre suite (y_n) de points de A telles que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ (dans } A) \text{ i.e. } \|x - x_n\| \to 0 \text{ si } n \to \infty$$

et $$y = \lim_{n\to\infty} y_n \text{ (dans } A) \text{ i.e. } \|y - y_n\| \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Mais alors $\|x+y-(x_n+y_n)\| = \|(x-x_n)+(y-y_n)\| \leq \underbrace{\|x-x_n\|+\|y-y_n\|}_{\to 0 \text{ si } n \to +\infty}$

donc $x+y = \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ et $x_n+y_n \in A$ (car A est un sous esp. vect).

Ceci prouve que $x+y \in \overline{A}$. On montre de même que $\forall \lambda \in K$, $\lambda x \in \overline{A}$. Donc $\overline{A}$ est un sous espace vectoriel.

b) Si A est ouvert, comme $0 \in A$, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(0,\alpha) \subset A$ (où $B(0,\alpha) = \{x \in E, \|x\| < \alpha\}$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\alpha > 0$). Mais par homothétie, ~~pou~~ on peut ramener tout point $x \in E$ dans la boule $B(0,\alpha)$ par exemple si $x \in E$, $\frac{\alpha}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(0,\alpha)$. Donc $\frac{\alpha}{2}\frac{x}{\|x\|} \in V$ et comme V est un s.e.v., $x = \frac{2\|x\|}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\frac{x}{\|x\|}\right) \in V$

donc $E \subset A$, d'où $A = E$.

c) A est connexe car A est connexe par arcs puisque A est convexe ($\forall x, y \in A$, le segment $\{\alpha x + (1-\alpha)y \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ joignant x à y, est entièrement inclus dans A).

A compacts ? si $A = \{0\}$ (s.e.v. réduit au vecteur nul) alors A est compact. Si $A \neq \{0\}$ alors A est non borné car si $x (\neq 0) \in A$, $\lambda x \in A$ pour tout $\lambda \in K$ et $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ tend vers $+\infty$ quand $|\lambda| \to +\infty$. Donc A n'est pas compact. (un compact est nécessairement fermé et borné).

3) a) Soit $z_n = x_n + y_n$ ($x_n \in K$ et $y_n \in F$) une suite convergente de points de $K+F$. Notons $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ i.e. $\|z - (x_n+y_n)\| \to 0$ si $n \to \infty$.

K est compact donc il existe une suite extraite (x_{n_k}) de la suite (x_n) et un point $x \in K$ telque : $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Mais alors $(y_{n_k}) \subset F$ converge vers $z - x$ puisque

$$\|z - x - y_{n_k}\| = \|z - x_{n_k} + x_{n_k} - x - y_{n_k}\| \leq \underbrace{\|z - x_{n_k} - y_{n_k}\|}_{\to 0} + \underbrace{\|x_{n_k} - x\|}_{\to 0}$$

Donc $z - x \in F$ car F est fermé. D'où $z - x = y \in F$ ce qui implique $z = x + y \in K+F$. Ceci prouve que $\overline{K+F} = K+F$ i.e. $K+F$ est fermé !

b) Soit $z_n = x_n + y_n$ ($x_n \in K$ et $y_n \in F$) une suite de points de $K+F$. De x_n on peut extraire une sous suite $x_{\varphi(n)}$ convergente vers un $x \in K$ (car K est compact). De la suite $y_{\varphi(n)}$ on peut extraire une sous suite $y_{\psi(\varphi(n))}$ convergente vers $y \in F$ car F est compact. Alors la suite doublement extraite $z_{\psi(\varphi(n))} = x_{\psi(\varphi(n))} + y_{\psi(\varphi(n))}$ converge vers $x+y$ donc $K+F$ est compact