Espaces Métriques. Corrigé détaillé de l'épreuve du 8/06/09 (2e session)

Exercice I :

1) Soit (f_{n_k}) une sous-suite. Pour $x \in [0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_{n_k}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} x^{n_k} = 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Si f était une limite de (f_{n_k}) dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. On aurait $f_{n_k} \to f$ uniformément sur $[0,1]$ donc $f_{n_k} \to f$ simplement sur $[0,1]$ et d'après ce qui précède, nécessairement $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. Mais alors $f \notin E$ (f n'est pas continue au point $x = 1$). Donc la suite (f_n) ne possède aucune sous suite convergente.

b) $B(0,1)$ est évidemment borné par définition.

Si $(f_n) \subset B(0,1)$ est une suite convergente :
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, on a aussi
$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$ (continuité de la norme). Or
$\|f_n\|_\infty \leq 1$ donc $\|f\|_\infty \leq 1$ (conservation des inégalités larges par passage à la limite) i.e $f \in B(0,1)$.
Donc $B(0,1)$ est fermé.

c) Si $B(0,1)$ était compact toute suite $(f_n) \subset B(0,1)$ possèderait une sous-suite convergente d'après le

théorème de Bolzano-Weierstrass. Ceci n'est pas le cas d'après a). $B(0,1)$ n'est donc pas compact.

2) La linéarité de ϕ découle de la linéarité de l'intégrale. De plus pour $f \in E$, on a

$$|\phi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|\,|\cos t|\,dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty |\cos t|\,dt = \|f\|_\infty \int_0^1 \cos t\,dt.$$

(car $\cos t > 0$ sur $[0,1]$). Ainsi :

$\forall f \in E, \quad |\phi(f)| \leq \|f\|_\infty \sin(1)$,

Ce qui montre que $|||\phi||| = \sup\limits_{\|f\|_\infty \leq 1} |\phi(f)| \leq \sin(1)$ $(*)$

Donc ϕ est continue. Mais on si prend $f \equiv 1$ sur $[0,1]$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\phi(f) = \int_0^1 \cos t\,dt = \sin(1)$.

D'où $|||\phi||| \geq \sin(1)$ et compte tenu de $(*)$:

$$|||\phi||| = \sin(1).$$

3) Soient f et $g \in B(0,r)$. On a :

$$|\psi(f) - \psi(g)| = \left|\int_0^1 [(f(t))^2 - (g(t))^2]\,dt\right| =$$

$$= \int_0^1 |(f(t)-g(t))(f(t)+g(t))|\,dt \leq \|f+g\|_\infty \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt$$

$$\leq \|f+g\|_\infty \|f-g\|_\infty \int_0^1 dt \leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\|f-g\|_\infty.$$
$$\leq 2r\|f-g\|_\infty$$

Ceci montre que la restriction de ψ à $B(0,r)$ est lipschitzienne de constante de lipschitz $k \leq 2r$.

b) D'après a) pour tout $r>0$, ψ est lipschitzienne donc continue sur $B(0,r)$. Soit maintenant $x \in E$, on a évidemment $x \in B(0, 2\|x\|)$ et puisque ψ est continue sur $B(0,2\|x\|)$, ψ est continue en x. Donc ψ est continue en tout point $x \in E$ i.e. ψ est continue sur E.

4) Si ψ était lipschitzienne sur E, il existerait une constante $k>0$ telle que

$$\forall f, g \in E, \ |\psi(f)-\psi(g)| \leq k\|f-g\|_\infty \quad (*)$$

Prenons $f \neq 0$ (auquel cas $\psi(f)>0$) et posons $g = \lambda f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). On aurait

$$|\psi(f)-\psi(g)| = |\psi(f)-\psi(\lambda f)|$$
$$= |\psi(f)-\lambda^2\psi(f)| = |1-\lambda^2|\,\psi(f)$$

et $\|f-g\|_\infty = \|f-\lambda f\|_\infty = |1-\lambda|\,\|f\|_\infty$.

Si $(*)$ était vraie, on devrait avoir

$$|1-\lambda^2|\,\psi(f) \leq k\,|1-\lambda|\,\|f\|_\infty$$

i.e $|1+\lambda|\,\psi(f) \leq k\|f\|_\infty$. Mais si $\lambda \to +\infty$, une telle inégalité est absurde. Donc ψ n'est pas lipschitzienne sur E tout entier.

5) $\mathcal{P}_2$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E (car $\dim \mathcal{P}_2 = 3$) donc $\mathcal{P}_2$ est fermé dans E. La restriction $\psi|_{\mathcal{P}_2} = \tilde{\psi}$ de ψ à $\mathcal{P}_2$ est donc une application continue de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathbb{R}$, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ induite sur $\mathcal{P}_2$.

Or $A = \{f \in \mathcal{P}_2 \ ; \ \|f\|_\infty \leq 1\}$ est la boule unité fermée de l'espace $(\mathcal{P}_2, \|\cdot\|_\infty)$ de dimension finie. Donc A est compacte. La restriction de ψ à $\mathcal{P}_2$ atteint donc sa borne supérieure sur A i.e.

$$\exists f_0 \in A, \ \psi(f_0) = \sup_{f \in A} \psi(f).$$

Exercice II :

1) Dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés. Ainsi

i) A n'est pas compact car il n'est pas borné puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n, 0, \sqrt{n^2-1}) \in A$ et $\|(n,0,\sqrt{n^2-1})\|_2^2 = 2n^2-1 \to +\infty$ si $n \to +\infty$.

ii) B n'est pas compact car il n'est pas borné puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n, 0, n+1) \in B$ et $\|(n,0,n+1)\|_2^2 = 2n^2+1 \to +\infty$ si $n \to +\infty$.

iii) C est compact car :

* Il est fermé puisque $C = f^{-1}(\{0\})$ avec $f : (x,y,z) \longmapsto x^2 - 1 + (y^2+z^2)^3$ continue sur $\mathbb{R}^3$ puisque c'est une application polynomiale.

* Il est borné car $(x,y,z) \in C \Leftrightarrow x^2 + (y^2+z^2)^3 = 1$ donc $x^2 \leq 1$ et $(y^2+z^2)^3 \leq 1$, d'où $x^2 \leq 1$ et $y^2+z^2 \leq 1$, ce qui implique

$$x^2 \leq 1 \text{ et } y^2 \leq 1 \text{ et } z^2 \leq 1,$$

c'est à dire

$$|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1,$$

ce qui prouve que C est borné.

2) a) C_1 et C_2 ne sont pas homéomorphes car C_1 n'est pas compact (c'est la réunion des 2 droites $y = x$ et $y = -x$) et C_2 est compact (c'est le cercle unité).

b) C_3 et C_4 ne sont pas homéomorphes car

C_3 est connexe comme réunion des deux connexes $\{(x,y)\,;\, y = x\}$ et $\{(x,y)\,;\, y = -x\}$ ayant un point commun (le point $(0,0)$), alors que C_4 n'est pas connexe puisque c'est l'ensemble $\{(x,y)\,;\, y = \frac{1}{x}\} \cup \{(x,y)\,;\, y = -\frac{1}{x}\}$ qui a 4 composantes connexes (faire un dessin !).

Remarque : on a utilisé le fait qu'un homéomorphisme conserve la compacité et la connexité.

3) a) E_i est ouvert car $E_i = f^{-1}(]0, +\infty[)$ image inverse de l'ouvert $]0,+\infty[$ par l'application continue $f : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$ (i^e coordonnée).

E_i est connexe car il est convexe donc connexe par arcs. En effet si x et $y \in E$, on a $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda) y \,;\, \lambda \in [0,1]\} \subset E_i$ puisque

$$(\lambda x + (1-\lambda) y)_i = \lambda x_i + (1-\lambda) y_i > 0 \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

b) $E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ est ouvert comme intersection finie d'ouverts et E est connexe comme intersection non vide de connexes.

c) $\overline{E} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i} = \{(x_1, \dots, x_n)\,;\, \forall i \in [\![1,n]\!] \;\; x_i \geq 0\}$

(voir détails à la fin)

4) a) $f^{-1}:[0,1]\to E$ existe par définition

Soient x et $y\in[0,1]$. Posons $X=f^{-1}(x)$ et $Y=f^{-1}(y)$

Comme f est une isométrie, on a

$$|f(X)-f(Y)|=|X-Y|$$

i.e. $|f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(y))|=|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|$

D'où

$\forall x,y\in[0,1],\ |x-y|=|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|$,

donc f^{-1} est une isométrie en particulier f est continue.

b) $E=f^{-1}([0,1])$ est compact comme image d'un compact par une application continue. De plus E est aussi connexe (image continue du connexe $[0,1]$). Donc E est un intervalle $[a,b]$ (car les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles et E doit être fermé).

Soit $x_1=f^{-1}(0)$ et $x_2=f^{-1}(1)$. On doit avoir $|x_1-x_2|=|f^{-1}(0)-f^{-1}(1)|=1$ car f^{-1} est une isométrie et $x_1,x_2\in E$ donc $1=|x_1-x_2|\leq|b-a|$. Ceci n'est possible que si $a=0$ et $b=1$. Donc $E=[0,1]$.

c) Pour tous $x,y\in[0,1]$, il existe $c\in]x,y[$ tel que $f(x)-f(y)=f'(c)(x-y)$ par le théorème des accroissements finis. Donc

$|f(x)-f(y)|=|f'(c)||x-y|=|x-y|$ (f est une isométrie)

ce qui montre que $|f'(c)|=1$.

Ainsi

$\forall x,y\in[0,1],\ \exists c\in]x,y[,\ |f'(c)|=1$,

ce qui signifie que l'ensemble A est dense dans $[0,1]$

D'autre part A est fermé car c'est l'image inverse du singleton $\{1\}$ (qui est fermé) par l'application continue $x\mapsto|f'(x)|$. Donc $A=\overline{A}=[0,1]$ (la première égalité car A est fermé, la deuxième car A est dense).

d) $x\in A \iff f'(x)=\pm1$. Or l'application $f': A\to\{-1,1\}$ est continue et $A=[0,1]$ est connexe donc $f'(A)$ est connexe donc $f'(A)=\{1\}$ ou $f'(A)=\{-1\}$.

* Si $f'(A)=\{1\}$, $f'(x)=1,\ \forall x\in[0,1]$ donc $f=Id$.
* Si $f'(A)=\{-1\}$, $f'(x)=-1\ \forall x\in[0,1]$ donc $f=-Id$.

(En effet $f'(x)=1 \Rightarrow f=x+C^{te}$ mais il est nécessaire que $C^{te}=0$ car $f([0,1])=[0,1]$ donc $f=Id$.
(Même raisonnement dans le cas $f'(x)=-1\ \forall x$).