Corrigé détaillé de l'épreuve d'Espaces métriques du 15/12/08

Exercice 1

1) a) $\forall k \geq 1$, $\left|\frac{1}{2^k}x_k\right| \leq |x_k|$. Donc la série à termes positifs $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2^k}x_k\right|$ converge puisque $x \in \ell^1$. La série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}x_k$ est donc absolument convergente donc elle converge.

1) b) Quand deux séries sont convergentes, toute combinaison linéaire de leurs sommes est égale à la somme de la série de terme général la même combinaison linéaire de leurs termes généraux. Il en résulte que pour tous x et y dans ℓ^1 et pour tous $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}(\lambda x_k + \mu y_k) = \varphi(\lambda x + \mu y),$$

puisque $\lambda x + \mu y = (\lambda x_k + \mu y_k)_{k\geq 1}$. Donc l'application φ est une forme linéaire. De plus puisque $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2}$, pour tout $x \in \ell^1$, on a $|\varphi(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}|x_k| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k| = \frac{1}{2}||x||_1$ donc φ est continue et $|||\varphi||| \leq \frac{1}{2}$.

1) c) Pour $x = (1, 0, 0, \ldots)$, on a $||x||_1 = 1$ et $\varphi(x) = \frac{1}{2}$. Donc $|||\varphi||| = \sup_{||x||_1 \leq 1}|\varphi(x)| \geq \frac{1}{2}$. D'où $|||\varphi||| = \frac{1}{2}$ grâce à 1) b) .

2) a) Si $x \in \ell^1$, $\sup_{k\geq 1}|x_k| = M < +\infty$. Donc $0 \leq x_k^2 \leq M|x_k|$ $(k \geq 1)$. La série à termes positifs $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2$ est dominée par une série convergente donc elle converge aussi et $f(x)$ est bien définie.

2) b) Pour $x,\ y \in B(0, r)$, on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^2 - y_k^2)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)(x_k + y_k)\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k - y_k|(|x_k| + |y_k|)\\ \leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k - y_k|(||x||_1 + ||y||_1) &\leq 2r\sum_{k=1}^{\infty}|x_k - y_k| = 2r||x - y||_1,\end{aligned}$$

ce qui prouve que f restreinte à $B(0, r)$ est lipschitzienne de constante $k \leq 2r$ donc f est continue sur $B(0, r)$. Mais $r > 0$ est arbitraire donc f est continue sur ℓ^1 tout entier.

2) c) Pour tout $x \in \ell^1$ (fixé), on a $|f(x) - f(\lambda x)| = |\sum_{k=1}^{+\infty}(x_k^2 - \lambda^2 x_k^2)| = |1 - \lambda^2|f(x)$. S'il existait une constante $\rho > 0$ telle que $|f(a) - f(b)| \leq \rho||a - b||_1$ pour tous $a, b \in \ell^1$, on aurait

$$|f(x) - f(\lambda x)| = |1 - \lambda^2|f(x) \leq \rho||x - \lambda x||_1 = \rho|1 - \lambda|||x||_1,$$

d'où en divisant par $|1 - \lambda|$ les 2 membres de cette inégalité : $|1 + \lambda|f(x) \leq \rho||x||_1$, ce qui conduit à une absurdité si on fait tendre λ vers $+\infty$ (x restant fixé). La fonction f n'est donc pas lipschitzienne sur ℓ^1.

2) d) Si $||x||_1 \leq 1$, nécessairement pour tout $k \leq 1$, $|x_k| \leq 1$ donc $x_k^2 \leq |x_k|$ (*), ce qui implique $f(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}|x_k| = ||x||_1 \leq 1$ (**). D'où $\sup_{x\in\bar{B}} f(x) \leq 1$.

D'autre part pour $x = (1, 0, 0, \ldots)$, on a $||x||_1 = 1$ et $f(x) = 1$ donc $\sup_{x\in\bar{B}} f(x) \geq 1$. Les deux inégalités montrent que $\sup_{x\in\bar{B}} f(x) = 1$.

Si $x \in F$, on a $1 = f(x) \leq ||x||_1 \leq 1$ (d'après (**)), d'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty}x_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}|x_k| = 1\ (***).$$

Mais, d'après (*), ceci n'est possible que si :

$$\forall k \geq 1,\ x_k^2 = |x_k|.$$

Donc pour tout entier k, $|x_k| = 0$ ou 1. Mais alors (***) exige qu'<u>une seule</u> composante de x soit égale à ± 1 et toutes les autres soient égales à zéro. En conséquence :

$$F = \left\{x \in \ell^1; \exists i \geq 1, x_i = \pm 1 \text{ et } \forall k \neq i,\ x_k = 0\right\}.$$

2) e) F est fermé (car $F = f^{-1}(1)$ et borné (car $F \subset \bar{B}$) mais il n'est pas compact car il est composé d'une infinité de points isolés à distance 2 les uns des autres donc du recouvrement de F par les boules $B(x, 1)$ ($x \in \ell^1$), on ne peut extraire de sous-recouvrement fini.
La boule $\bar{B}$ n'est donc pas compacte puisque si c'était le cas, F qui est fermé dans $\bar{B}$, devrait être compact.

Exercice 2

1) Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(E, ||.||_\infty)$, i.e. :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ n, m \geq N \Rightarrow ||f_n - f_m||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \epsilon\ (*).$$

En particulier pour tout t fixé, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres réels. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) \in \mathbb{R}$ existe car $\mathbb{R}$ est complet. En maintenant $n \geq N$ fixé et en faisant tendre m vers $+\infty$ dans (*), par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on obtient :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ n \geq N \Rightarrow \forall t \in [0, 1],\ |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon,$$

ce qui montre que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ donc f est continue (d'après un résultat bien connu du L2) i.e $f \in E$ et on a bien $\lim f_n = f$ dans $(E, ||.||_\infty)$ donc cet espace est de Banach.
2) a) La fonction f_n est affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ et nulle sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et son graphique montre aussitôt que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $||f_n||_\infty = 1$ et $||f_n||_1 = \frac{1}{2}$.
2) b) Si les normes étaient équivalentes, il existerait des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall f \in E,\ C_1||f||_\infty \leq ||f|_1 \leq C_2||f||_\infty$$

En particulier pour $f = f_n$ ceci impliquerait $C_1 n \leq \frac{1}{2}$, ce qui est impossible puisque $C_1 n \to +\infty$ si $n \to +\infty$. Donc les deux normes ne sont pas équivalentes.
3) a) Pour toutes $f,\ g \in E$ et tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}|\psi(f)(x) - \psi(g)(x)| = \left|\int_x^1 t^2(f(t) - g(t))dt\right| &\leq \int_x^1 t^2|f(t) - g(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 t^2|f(t) - g(t)|dt \leq ||f - g||_\infty \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}||f - g||_\infty.\end{aligned}$$

La majoration obtenu étant vraie pour tout $x \in [0, 1]$, on en déduit que

$$\sup_{x\in[0,1]} |\psi(f)(x) - \psi(g)(x)| \leq \frac{1}{3}||f - g||_\infty.$$

Donc $||\psi(f) - \psi(g)||_\infty \leq \frac{1}{3}||f - g||_\infty$, ce qui montre que l'application ψ est lipschitzienne de constante $k \leq \frac{1}{3}$.
3) b) Comme $\psi : E \to E$ est lipschitzienne de constante $k \leq 1$, le théorème du point fixe

de Picard, nous assure que l'équation $\psi(f) = f$, a une solution unique $f \in E$ qu'on peut obtenir par itération mais il est plus simple ici de noter que comme f satisfait

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1 + \int_x^1 t^2 f(t)dt,$$

la fonction f est dérivable et $f'(x) = -x^2 f(x)$ donc $f(x) = Ce^{-x^3/3}$. La condition initiale $f(1) = 1$ donne aussitôt $C = e^{1/3}$ d'où $f(x) = e^{\frac{1}{3}(1-x^3)}$.

Exercice 3

1) a) Les compacts de $\mathbb{R}^4$ sont les fermés bornés.
i) Les ensembles A et C ne sont pas compacts car ils ne sont pas bornés. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = (-n, 0, 0, 0) \in A$ et $||u_n||_2 = \sqrt{n^2} = |n| \to +\infty$ si $n \to +\infty$. De même $v_n = (n, 0, \frac{1}{n}, 0) \in C$ et $||v_n||_2 = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \to +\infty$ si $n \to +\infty$.
ii) L'ensemble B est compact car il est fermé (étant l'image inverse du fermé $]-\infty, 1]$ par l'application continue car polynomiale : $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^4$) et il est borné car $x^2 + y^2 + z^2 + t^4 \leq 1$ implique $x^2 \leq 1$, $y^2 \leq 1$, $z^2 \leq 1$ et $t^4 \leq 1$, d'où $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$, $|t| \leq 1$.
1) b) Les ensembles A, B et C sont fermés donc $\bar{A} = A$, $\bar{B} = B$, $\bar{C} = C$. En effet A$=f^{-1}(]-\infty, 1])$ où $]-\infty, 1]$ est fermé et $f(x,y,z,t) = x^3 + y^3 + z^3 + t^3$ est continue car polynomiale. De même $C = f^{-1}(\{1\})$ où le singleton $\{1\}$ est un fermé et $f(x,y,z,t) = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$ est continue car polynomiale.
L'intérieur d'un ensemble étant le plus grand ouvert contenu dans cet ensemble on obtient aussitôt que
$A^\circ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x^3 + y^3 + z^3 < 1 - t^3\}$
$B^\circ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1 - t^4\}$
$C^\circ = \emptyset$
Pour le dernier ensemble, cela se justifie par le fait qu'on a
$C^\circ = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) > 1\} \cap \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) < 1\}$.

2) Si f est une isométrie sa bijection inverse f^{-1} est aussi une isométrie (comme on peut le vérifier aussitôt) en particulier elle est continue et donc $f^{-1}([0,1]) = A$ est connexe (image continue d'un connnexe). Mais on sait que les connexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles et de plus $f^{-1}([0,1])$ est un fermé (image inverse d'un fermé par une application continue). Donc $A = [a,b]$ ($\subset [0,1]$) est un intervalle fermé. Considérons les points $u_0 = f^{-1}(0) \in A$ et $u_1 = f^{-1}(1) \in A$. On a

$$|u_1 - u_0| = |f^{-1}(1) - f^{-1}(0)| = |1 - 0| = 1 \text{ (propriété d'isométrie) }.$$

Mais $1 = |u_1 - u_0| \leq |b - a| \leq 1$ (car $u_0, u_1 \in [a,b]$). Donc $|b - a| = 1$ ce qui exige $a = 0$ et $b = 1$. Donc $A = [0,1]$.

3) On sait que U est réunion disjointe de ses composantes connexes. Soit A une telle composante connexe. A est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle. L'ensemble A ne peut pas être un intervalle fermé ou semi-ouvert. En effet supposons par exemple que $A =]a,b]$. On a $b \in U$ et U est ouvert donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $]b - \epsilon, b + \epsilon[\subset U$. Mais alors on aurait $A \subset]a, b + \frac{\epsilon}{2}] \subset U$; l'ensemble des points connectés à b est strictement plus grand que A ce qui contredit le fait que A est la composante connexe de b.
Donc toutes les composantes connexes de U sont des intervalles ouverts. A chaque composante connexe A on peut associer un rationnel $r \in A$. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable et que les composantes connexes sont disjointes, il y a au plus un nombre dénombrable de telles composantes connexes, d'où le résultat demandé.

Commentaires et erreurs à éviter

Il est recommandé aux candidats de lire **attentivement** ce qui suit

Exercice 1

1) a) **Personne** (même parmi les meilleures copies ! !) n'a su justifier correctemment la convergence de la série $\varphi(x)$. Ceci est **inquiétant** et il convient de réagir promptement. Voilà le pseudo-raisonnement que j'ai trouvé dans la plupart des copies : (sic)
$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty$ (série géomètrique de raison $\frac{1}{2} < 1$ donc convergente) donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_k$ converge (ou pire : «donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_k < +\infty$» ! !). La raison de la convergence de la série découle de la convergence absolue. Il faut donc montrer d'abord que la série des valeurs absolues est convergente ! ! !**Lorsqu'on écrit : $\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_k\right| \leq$ ... on présuppose la convergence de la série et donc on ne démontre rien !**

1) b) Beaucoup (trop) de personnes écrivent des choses du genre $||\varphi(x)||_1 \leq \frac{1}{2}||x||_1$ c'est à dire qu'ils écrivent $||\varphi(x)||_1$ au lieu de $|\varphi(x)|$. Ceci dans certains cas peut-être imputé à de l'étourderie mais la fréquence de telles choses me fait plutôt penser à une mauvaise compréhension des objets mathématiques due, je le pense, à un **manque de travail sérieux**.

1) c) La réponse à cette question a été trouvée dans les copies correctes mais la rigueur de la rédaction fait presque toujours défaut.

2) a) question assez mal traitée dans la plupart des copies.

2) b) c'est la continuité de f sur $B(0,r)$ **pour tout** $r > 0$ (ce qui est rarement mentionné) qui implique la continuité sur tout ℓ^1.

2) c) Cette question n'a été traitée correctement que dans quelques rares copies malgré l'indication cruciale donnée dans l'énoncé.

2) d) e) : Dans l'expression exacte de F la plupart des copies oublient les vecteurs $x = (0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots)$.

Exercice 2

1) C'est une question de cours que très peu (hélas) font correctement : on trouve la plupart du temps des raisonnements tronqués et incorrects. Ce genre de question doit être abordée sans précipitation, en détails pour éviter les rédactions bâclées qui ne rapportent aucun point !

2) a) et b) Rien de spécial à signaler.

3) a) Ici il faut **impérativement** commencer par majorer la quantité $|\psi(f)(x) - \psi(g)(x)|$ pour $x \in [0,1]$ pour ensuite passer au sup lorsqu'on a le majorant **et non commencer par mettre des normes $||.||_\infty$ sur toutes les expressions mêmes contenant la variable x !**, des choses comme : $||\psi(f)(x) - \psi(g)(x)||_\infty|| \leq || \int_x^1 t^2(f(t) - g(t))dt||_\infty \leq$ ... etc et en plus en faisant des calculs d'intégrale à l'intérieur des normes etc... ! ! ! ! **J'ai déjà fait cette remarque dans mon corrigé de l'an dernier ! Il serait utile que les gens lisent ces commentaires sinon le correcteur n'aura bientôt plus envie d'écrire un corrigé s'il a l'impression que cela ne sert à rien !**

3) b) Il y a encore certaines personnes qui ont des difficultés à résoudre une équation différentielle des plus simples et parmi celles qui pourraient y arriver, il y a ceux qui ne terminent pas la question en laissant une constant arbitraire dans l'expression de f alors que quelques lignes avant ils ont dit que la solution était unique !

Exercice 3

1) a) b) rien de spécial à signaler.

2) Il faut d'abord monter que A est un intervalle et cela s'obtient par la continuité de f^{-1}

et de la conservation de la connexité par image continue.
3) Très peu de copies ont su voir pourquoi les composantes connexes étaient ouvertes et personne n'a vu qu'elles étaient au plus en nombre dénombrable.

Remarque finale (qui figure déjà dans mon corrigé de l'an dernier) : soyez précis et éviter la surabondance d'explications inutiles qui vous prennent du temps (et qui ne rapportent rien). En sens inverse les affirmations sans justification ne valent rien et **les pseudo-raisonnements ponctués de «donc» et se terminant par le résultat demandé ne servent qu'à irriter le correcteur et ne devraient plus figurer sur des copies de troisième année !**