M1 de Mathématiques - 1ère session Probabilités 2

Corrigé de l'épreuve du lundi 4 Mai 2009.

Partie I :

1) voir le cours.

2) a) le vecteur (X,Y,Z) a une densité de la forme

$$f(x,y,z)=f_X(x)f_Y(y)f_Z(z) \quad (\text{car } X, Y \text{ et } Z \text{ sont indép.})$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}.$$

$$\varphi_U(t)=\mathbb{E}(e^{itU})=\mathbb{E}\left(e^{it\frac{X+YZ}{\sqrt{1+Z^2}}}\right)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}e^{it\frac{x+yz}{\sqrt{1+z^2}}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}e^{it\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}}e^{it\frac{yz}{\sqrt{1+z^2}}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{-\frac{1}{2}y^2}e^{-\frac{1}{2}z^2}dx\,dy\,dz$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli cette intégrale triple vaut

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}e^{i\frac{t}{\sqrt{1+z^2}}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)e^{i\frac{tz}{\sqrt{1+z^2}}y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

L'intégrale en x vaut $\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{1+z^2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{1+z^2}}$

La deuxième intégrale (en y) vaut :

$$\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{1+z^2}}\right)\int_{\mathbb{R}}e^{i\frac{tz}{\sqrt{1+z^2}}y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$=\varphi_X\left(\frac{t}{\sqrt{1+z^2}}\right)\varphi_Y\left(\frac{tz}{\sqrt{1+z^2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{1+z^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2z^2}{1+z^2}}=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Enfin la dernière intégrale (en z) vaut

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=e^{-\frac{1}{2}t^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}dz$$

$=e^{-\frac{1}{2}t^2}$. Ainsi $\varphi_U(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$ est la fonction caractéristique de la loi $N(0,1)$. <u>Donc U est de loi $N(0,1)$</u>.

b) $\varphi_{(U,Z)}(t_1,t_2)=\mathbb{E}\left(e^{i(t_1U+t_2Z)}\right)=$

$$\mathbb{E}\left(e^{i\left(t_1\frac{X+YZ}{\sqrt{1+Z^2}}+t_2Z\right)}\right)=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^3}e^{it_1\frac{x+yz}{\sqrt{1+z^2}}}e^{it_2z}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}dx\,dy\,dz$$

En appliquant Fubini comme en a), l'intégration en x puis y donne comme ci-dessus

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{t_1^2}{1+z^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{t_1^2 z^2}{1+z^2}} = e^{-\frac{1}{2}t_1^2}.$$

Il reste l'intégrale en z :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t_1^2} e^{it_2 z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = e^{-\frac{1}{2}t_1^2}\varphi_Z(t_2)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t_1^2} e^{-\frac{1}{2}t_2^2} = \varphi_U(t_1)\varphi_Z(t_2)$$

$$\forall (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi_{U,Z}(t_1,t_2) = \varphi_U(t_1)\varphi_Z(t_2)$$

donc (Thm. du cours voir formulaire) U et Z sont des v.a. indépendantes.

Partie II

1) $Z_n \geq 0 \quad Z = \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n \in L^1$ (hypothèse)

a) $\forall n \geq 1$, $Z_n \leq Z$ d'où $\mathbb{E}(Z_n) \leq \mathbb{E}(Z) < +\infty$

donc $Z_n \in L^1$ et $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z_n)$ est bien défini d'après le cours.

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \in L^1$ (L^1 est un e.v.)

et $S_n \nearrow Z$ quand $n\to+\infty$. D'après la propriété de convergence monotone de l'espérance condi-

-tionnelle, on a

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(S_n) \nearrow \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z) \text{ p.s. quand } n\to+\infty$$

Mais $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z_k)$ (linéarité de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$)

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z_k) \nearrow \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z)$ p.s. $(n\to+\infty)$,

ce qui signifie que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z_k) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z)$.

2) Par la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle, il faut vérifier que $\forall B \in \mathcal{B}$

$$\int_B Z\, d\mathbb{P} = \int_B \varphi(X)\, d\mathbb{P}$$

Comme tout $B\in\mathcal{B}(X)$ est de la forme $B = [X\in C]$ où $C\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (boréliens de $\mathbb{R}$), il s'agit de vérifier que :

$$\forall C\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \int_{[X\in C]} f(X,Y)\, d\mathbb{P} = \int_{[X\in C]} \varphi(X)\, d\mathbb{P}$$

c'est à dire $\displaystyle\int_\Omega \mathbb{1}_C(X) f(X,Y)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{1}_C(X)\varphi(X)\, d\mathbb{P}$

Par la formule du transfert ceci revient à vérifier que

$$\forall C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_C(x) f(x,y)\, d\mu_X(x) d\mu_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_C(x)\varphi(x)\, d\mu_X(x)$$

$$\Longleftrightarrow \int_{C\times\mathbb{R}} f(x,y)\, d\mu_X(x)\, d\mu_Y(y) = \int_C \mathbb{E}(f(x,Y))\, d\mu_X(x)$$

Ce qui est vérifié car par le théorème de Fubini la première intégrale vaut

$$\int_C \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\mu_Y(y)\right) d\mu_X(x) = \int_C \mathbb{E}(f(x,Y))\, d\mu_X(x).$$

(Remarque : dans l'application de la formule du transfert, on a utilisé le fait que la loi du couple (X,Y) est la mesure $d(\mu_X \otimes \mu_Y)(x,y) = d\mu_X(x)\, d\mu_Y(y)$ d'après l'hypothèse d'indépendance de X et Y).

3) a) $$\mathbb{E}(e^{XY}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{xy}\, d\mu_X(x)\, d\mu_Y(y) =$$

$$\int_{[0,\alpha]\times\mathbb{R}_+} e^{xy}\, d\mu_X(x)\, \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_0^\alpha \lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{(x-\lambda)y} dy\right) d\mu_X(x) \quad ⊛$$

d'après le théorème de Fubini (pour fonctions ≥ 0)

On a :

$$⊛ = \int_0^\alpha \lambda \left[\frac{1}{x-\lambda} e^{(x-\lambda)y}\right]_0^\infty d\mu_X(x) = \int_0^\alpha \frac{\lambda}{\lambda - x}\, d\mu_X(x) < +\infty$$

car la fonction $x \mapsto \frac{\lambda}{\lambda - x}$ est bornée sur $[0,\alpha]$ puisque $\alpha < \lambda$ par hypothèse. D'où $e^{XY} \in L^1$

b) d'après la question 2), $\mathbb{E}(Z|X) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}(X)}(Z) = \varphi(X)$ où

$$\varphi(x) = \mathbb{E}(e^{xY})$$

$$= \int_0^\infty e^{xy} \lambda e^{-\lambda y} dy = \lambda \int_0^\infty e^{(x-\lambda)y} dy = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}$$ d'où le résultat demandé.

Partie III :

1) $$Z_n = \frac{3 Z_{n-1}}{2^{X_n}} = \frac{3^n}{2^{X_1+X_2+\cdots+X_n}} \geq 0 \quad (n \geq 1).$$

$$\mathbb{E}(Z_n) = 3^n\, \mathbb{E}\left(\frac{1}{2^{X_1+\cdots+X_n}}\right) = 3^n \left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{2^{X_1}}\right)\right)^n$$

(indépendance des X_i).

Or $$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2^{X_1}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$ donc $\mathbb{E}(Z_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n < +\infty$, ce

qui montre que $Z_n \in L^1$ ($\forall n \geq 1$)

Alors $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z_{n+1})$ a un sens et

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}\left(\frac{3Z_n}{2^{X_{n+1}}}\right) = 3Z_n\, \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}\left(\frac{1}{2^{X_{n+1}}}\right)$$

(car Z_n est $\mathcal{B}_n$ mesurable $\left\{\begin{array}{l}\text{et } Z_n \in L^2 \text{ (voir 2))} \\ \text{et } \frac{1}{2^{X_{n+1}}} \in L^2 \text{ car bornée}\end{array}\right.$)

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z_{n+1}) = 3Z_n\, \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}\left(\frac{1}{2^{X_{n+1}}}\right) = 3Z_n\, \mathbb{E}\left(\frac{1}{2^{X_{n+1}}}\right)$$

(car X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{B}_n$). D'où

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z_{n+1}) = 3Z_n \cdot \frac{1}{3} = Z_n,$$

ce qui prouve que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une $\mathcal{B}_n$-martingale.

2) $\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}\left(\frac{9^n}{4^{X_1+\dots+X_n}}\right) = 9^n \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4^{X_k}}\right) =$

$$9^n\left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{4^{X_1}}\right)\right)^n = 9^n\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} \mathbb{P}(X_1 = i)\right)^n =$$

$$9^n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{8^i}\right)^n = 9^n\left(\frac{1}{8}\,\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\right)^n = \left(\frac{9}{7}\right)^n.$$

Donc $\mathbb{E}(Z_n^2) = \left(\frac{9}{7}\right)^n \to +\infty$ si $n \to +\infty$. Ceci prouve que Z_n ne peut pas converger dans L^2 vers une v.a. $Z \in L^2$ (on devrait avoir alors $\|Z_n\|_2 \to \|Z\|_2$ $n \to +\infty$, ce qui est impossible).

3) $\ln(Z_n) = \ln\left(\frac{3^n}{2^{X_1+\dots+X_n}}\right) = n\ln(3) - \ln(2)\sum_{k=1}^{n} X_k$

D'où

$$\frac{1}{n}\ln(Z_n) = \ln(3) - \ln(2)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

D'après la Loi forte des grands nombres,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \mathbb{E}(X_1) \text{ p.s.},$$

et $\mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2.$

(soit on fait le calcul, soit on reconnait l'espérance de la loi de Pascal avec $p = \frac{1}{2}$)

D'où $\frac{1}{n}\ln(Z_n) \longrightarrow \ln(3) - 2\ln(2) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$

donc $\ln(Z_n) \to -\infty$ si $n \to +\infty$,

ce qui prouve que $Z_n \to 0$ p.s. ($n \to +\infty$).

<u>Remarque</u> : on sait que la convergence p.s. n'implique pas la convergence dans L^2. On a donc ici un exemple d'une suite de v.a. (Z_n) telle que $Z_n \to 0$ p.s. et telle que $\mathbb{E}(Z_n^2) \to +\infty$. La dernière question est mal formulée (remplacer le mot "explication" par "commentaire").