Probabilités 2 Corrigé de l'épreuve du 18/06/09 (1)
(Session n°2)

Exercice 1 :

1) $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_0^1 e^{itx}\,dx$ (car la densité de X vaut 1 sur $[0,1]$ et 0 ailleurs. Donc

$$\varphi_X(t) = \left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it} = e^{it/2}\,\frac{e^{it/2}-e^{-it/2}}{2it/2} = e^{it/2}\,\frac{\sin(t/2)}{t/2}.$$

2) a) $\varphi_{\frac{X_k}{2^k}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X_k}{2^k}}\right) = \varphi_{X_k}(t/2^k) = \frac{1+e^{it/2^k}}{2} =$

$$e^{it/2^{k+1}}\left(\frac{e^{-it/2^{k+1}}+e^{it/2^{k+1}}}{2}\right) = \cos\frac{t}{2^{k+1}}\,e^{it/2^{k+1}}.$$

Comme les $\frac{X_k}{2^k}$ sont indépendantes, on a

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_n(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\frac{X_k}{2^k}}(t) = \prod_{k=1}^n\left(\cos\frac{t}{2^{k+1}}\,e^{i\frac{t}{2^{k+1}}}\right) =$$

$$= e^{it\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}}\right)}\prod_{k=1}^n \cos\frac{t}{2^{k+1}} = e^{i\frac{t}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\cdot\frac{t/2^{n+1}}{\sin\frac{t}{2^{n+1}}}$$

(la formule sur le produit des cosinus se démontre facilement par récurrence).

b) $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t) = e^{it/2}\,\frac{\sin t/2}{t/2}$.

c) D'après 1) on a donc $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \varphi_X(t)$ ($\forall t\in\mathbb{R}$) où X est la v.a. de loi uniforme de la question 1).

D'après le théorème de continuité de P. Lévy, on a donc $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ quand $n\to+\infty$.

d) $\forall\omega\in\Omega$, la série à termes positifs $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{X_k(\omega)}{2^k}$ est majorée par la série convergente $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = 1$. Donc elle converge vers une limite $Z(\omega)$: $0\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{X_k(\omega)}{2^k} = Z(\omega)$ (≤ 1).

On peut écrire $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = Z(\omega)$ ($\forall\omega\in\Omega$).

Mais la convergence p.s. implique la convergence en loi donc Z a même loi que X i.e.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{X_k}{2^k} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X.$$

Exercice 2 :

1) voir la solution dans le cours ou dans le corrigé de l'épreuve de la 1ère session.

2) Posons $f(X,Y) = \exp(XY)$. Cette v.a. est dans L^1 car elle est bornée d'après les hypothèses (X et Y sont bornées). On peut appliquer le

résultat de la question 1):

$$\mathbb{E}(\exp(XY)|X) = \phi(X) \ (p.s.),$$

où $\phi(x) = \mathbb{E}(\exp(xY)) = \int_0^1 \exp(xy)\,dy = \left[\frac{1}{x} e^{xy}\right]_0^1 = \frac{e^x - 1}{x}$. Donc

$$\mathbb{E}(\exp(XY)|X) = \frac{e^X - 1}{X} \ p.s.$$

3) La v.a. $f(X,Y) = \cos(XY)$ est bornée donc elle est dans L^1 et on peut appliquer la question 1:

$$\mathbb{E}(\cos(XY)|X) = \phi(X) \ p.s,$$

où $\phi(x) = \mathbb{E}(\cos(xY)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(xk) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Mais

$\cos(xk) = \frac{e^{ixk} + e^{-ixk}}{2}$, donc on peut écrire :

$$\phi(x) = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{ix})^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{-ix})^k}{k!}\right]$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\exp(\lambda e^{ix}) + \exp(\lambda e^{-ix})\right]$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\exp(\lambda\cos x + i\lambda \sin x) + \exp(\lambda \cos x - i\lambda \sin x)\right]$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\cancel{2}} \exp(\lambda\cos x)\, \cancel{2} \cos(\lambda \sin x).$$ D'où le résultat.

Exercice 3 :

1) La fonction caractéristique du vecteur gaussien $X = (X_0, X_1, \dots, X_d)$ est égale à $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X\rangle}) = \exp(-\frac{1}{2}\langle t|\Gamma t\rangle)$ $(\forall t = (t_0, t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^{d+1})$. Si on fait $t = (t_0, 0, \dots, 0)$, on obtient

$$\varphi(t_0, 0, \dots, 0) = \mathbb{E}(e^{it_0 X_0}) = \varphi_{X_0}(t_0) = e^{-\frac{1}{2}\Gamma_{00} t_0^2},$$ ce qui montre que X_0 est de loi $N(0, \Gamma_{00})$ (normale centrée de variance Γ_{00}).

De même en prenant t de la forme $t = (0, t_1, \dots, t_d)$, on voit que $(X_1, \dots, X_d)$ est gaussien de matrice des covariances $\tilde{\Gamma} = (\Gamma_{ij})_{1 \le i,j \le d}$ obtenue en <u>barrant</u> la première ligne et la première colonne de Γ.

2) D'après un théorème du cours X_0 et $(X_1, \dots, X_d)$ sont des v.a. indépendants si et seulement si

$\mathcal{L}(X_0, X_1, \dots, X_d) = \mathcal{L}(X_0) \otimes \mathcal{L}(X_1, \dots, X_d)$ (produit tensoriel des lois de X_0 et $(X_1, \dots, X_d)$ respectivement) ce qui équivaut pour les fonctions caractéristiques à la condition : $\forall t = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$

$$\mathbb{E}(e^{i(t_0X_0 + t_1X_1 + \dots + t_dX_d)}) = \mathbb{E}(e^{it_0X_0})\,\mathbb{E}(e^{i(t_1X_1 + \dots + t_dX_d)}),$$

ou encore :

$\forall (t_0, t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\exp(-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma t\rangle) =$

$= e^{-\frac{1}{2}\Gamma_{00} t_0^2} \exp(-\frac{1}{2}\langle \tilde{t}, \tilde{\Gamma}\tilde{t}\rangle)$

(où on a posé $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_d)$). Ceci équivaut à :

$\forall t = (t_0, t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\langle t, \Gamma t\rangle = \Gamma_{00} t_0^2 + \langle \tilde{t}, \tilde{\Gamma}\tilde{t}\rangle$

$$\iff \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{00} & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{\Gamma}} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$\iff \mathbb{E}(X_0 X_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, d$).

3) a) $(\tilde{X}_0, X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur gaussien car toute combinaison linéaire de ses coordonnées est aussi une combinaison linéaire des v.a. $X_0, X_1, \dots, X_d$ donc une v.a. normale puisque $(X_0, X_1, \dots, X_d)$ est gaussien par définition. (En effet $\forall (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d)$,

$$\lambda_0 \tilde{X}_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d = \lambda_0 X_0 + \sum_{i=1}^{d} (\lambda_i - a_i) X_i \text{).}$$

Calculons la fonction caractéristique du vecteur $Y = (\tilde{X}_0, X_1, \dots, X_d)$: $\varphi_Y(t_0, t_1, \dots, t_d) = \mathbb{E}\left(e^{i(t_0\tilde{X}_0 + t_1 X_1 + \dots + t_d X_d)}\right)$

$= \mathbb{E}\left(e^{i(t_0 X_0 - a_1 t_0 X_1 - \dots - a_d t_0 X_d + t_1 X_1 + \dots + t_d X_d)}\right) =$

$= \mathbb{E}\left(\exp i(t_0 X_0 + (t_1 - a_1 t_0) X_1 + \dots + (t_d - a_d t_0) X_d)\right)$

$= \exp(-\frac{1}{2}\langle t', \Gamma t'\rangle)$, où $t' = (t_0, t_1 - a_1 t_0, \dots, t_d - a_d t_0)$.

Si on pose $T = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_d \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on voit que

$\langle t', \Gamma t'\rangle = \langle t, \Gamma' t\rangle$ où $\Gamma' = T \Gamma {}^tT$

(produit des matrices T, Γ et ${}^tT$ dans cet ordre).

Donc Y est gaussien de matrice des covariances Γ'.

b) D'après la théorie de la projection dans les espaces de Hilbert, $\tilde{X}_0$ est orthogonal (dans $L^2(\Omega)$) au sous espace vectoriel V engendré par les v.a. $X_1, \dots, X_d$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{d} a_i X_i$ est la projection orthogonale $P_V(X_0)$ de X_0 sur V. Donc il existe des constantes $a_1, a_2, \dots, a_d$ vérifiant les conditions demandées.

c) D'après 2), $\tilde{X}_0$ et $(X_1, \dots, X_d)$ sont indépendantes donc $\mathbb{E}(\tilde{X}_0 | X_1, \dots, X_d) = \mathbb{E}(\tilde{X}_0 | \mathcal{B}) = \mathbb{E}(\tilde{X}_0)$ (thm du cours) mais $\mathbb{E}(\tilde{X}_0) = 0$ car les X_i sont centrées. Il en résulte que $\mathbb{E}(X_0 - (a_1 X_1 + \dots + a_d X_d) | \mathcal{B}) = 0$ d'où par linéarité de $\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{B})$: $\mathbb{E}(X_0 | \mathcal{B}) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{d} a_i X_i | \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i$.