Partie I :

1) On a $X_1 = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, où $\xi_i = 1$ si la pièce $n°i$ tombe sur pile et $\xi_i = 0$ si elle tombe sur face.

Les v.a. ξ_i sont indépendantes par hypothèse et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$

(i.e. $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\xi_i = 0) = 1-p$)

D'après le cours, on sait alors que X_1 est de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ i.e. X_1 prend les valeurs $0, 1, \ldots, n$ et

$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

La fonction génératrice de X_1 est donnée par :

$$G_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k) t^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pt)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (pt + 1 - p)^n.$$

On peut retrouver ce résultat à partir de la fonction génératrice $G_{\xi_i}(t) = \mathbb{P}(\xi_i = 0)t^0 + \mathbb{P}(\xi_i = 1)t$

$$= 1 - p + pt,$$

et en utilisant le théorème qui assure que

$$G_{X_1}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{\xi_i}(t) = (1-p+pt)^n$$

(puisque les ξ_i sont indépendantes),

2) X_2 peut prendre a priori les valeurs $k = 0, 1, \ldots, n$

Comme les événements $[X_1 = i]$ $i = 0, 1, \ldots, n$ forment un système complet d'événements, la formule de la probabilité totale permet d'écrire

$$\forall k = 0,1,\ldots,n \qquad \mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_2 = k | X_1 = i)\,\mathbb{P}(X_1 = i)$$

$$= \sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}(X_2 = k | X_1 = i)\,\mathbb{P}(X_1 = i)$$

(car si $i < k$, $\mathbb{P}(X_2 = k | X_1 = i) = 0$). D'où

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{i=k}^{n} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \quad (*)$$

(car si $X_1 = i$, on lance i pièces au 2^e lancer et le nombre de pièces tombant sur pile est de loi $\mathcal{B}(i,p)$)

$$(*) = (1-p)^{n-k} \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{k!(i-k)!} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^{i+k}.$$

$$= \frac{n!\,p^k}{k!} (1-p)^{n-k} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i-k)!(n-i)!} p^i$$

Dans le calcul de la somme, posons $i - k = j$ donc $j = 0, 1, \ldots, n-k$. Alors

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i-k)!(n-i)!} p^i = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!(n-k-j)!} p^{k+j}$$

$$= \frac{p^k}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} p^j$$

$$= \frac{p^k}{(n-k)!} (1+p)^{n-k}.$$ Finalement, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_2=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^{2k}(1-p)^{n-k}(1+p)^{n-k}$$

$$= C_n^k (p^2)^k(1-p^2)^{n-k} \qquad k=0,1,\dots,n$$

<u>Conclusion</u>: X_2 est de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p^2)$.

<u>Remarque 1</u> Ce résultat est intuitivement évident car une pièce donnée ne peut être conservée que si elle tombe deux fois sur pile et cette probabilité est p^2.

D'où <u>la fonction génératrice de X_2</u>:

$$G_{X_2}(t)=(p^2t+1-p^2)^n.$$

<u>Remarque 2</u>: <u>Sans calculer la somme</u> (*), on aurait pu écrire la fonction génératrice $G_{X_2}(t)$, sous la forme:

$$G_{X_2}(t)=\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_2=k)t^k$$

$$\sum_{k=0}^n\sum_{i=k}^n C_i^k p^k(1-p)^{i-k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}t^k$$

<u>en intervertissant les sommations</u>, on obtient:

$$G_{X_2}(t)=\sum_{i=0}^n\sum_{k=0}^i C_i^k p^k (1-p)^{i-k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} t^k$$

$$=\sum_{i=0}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i}\sum_{k=0}^i C_i^k (pt)^k(1-p)^{i-k}$$

$$=\sum_{i=0}^n C_n^i p^i(1-p)^{n-i}(pt+1-p)^i=$$

$$=\sum_{i=0}^n C_n^i(p^2t+p-p^2)^i(1-p)^{n-i}$$

$$=(p^2t+\cancel{p}-p^2+1-\cancel{p})^n=(p^2t+1-p^2)^n.$$

<u>D'où l'on déduit</u> que X_2 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p^2)$

3) On fait l'hypothèse de récurrence que X_{j-1} suit la loi $\mathcal{B}(n,p^{j-1})$. Pour $k=0,1,\dots,n$, on a

$$\mathbb{P}(X_j=k)=\sum_{i=k}^n \mathbb{P}(X_j=k\,|\,X_{j-1}=i)\,\mathbb{P}(X_{j-1}=i)$$

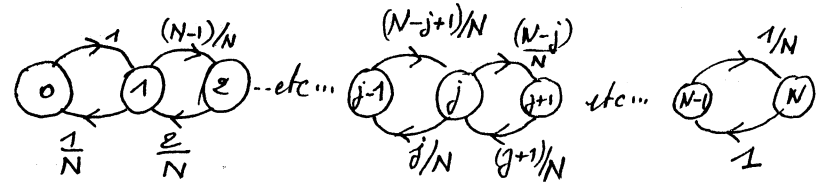
$$=\sum_{i=k}^n C_i^k p^k(1-p)^{i-k}C_n^i(p^{j-1})^i(1-p^{j-1})^{n-i}$$

$$=C_n^k(p^j)^k(1-p^j)^{n-k}$$ (<u>Calcul analogue au cas de 1</u>)

donc X_j suit la loi $\mathcal{B}(n,p^j)$

4) au bout de i lancers, il reste en moyenne $\mathbb{E}(X_i)=np^i$ boules.

<u>Partie II</u>: 1) le nombre X_{n+1} de boules dans B à l'instant $n+1$ ne dépend que de X_n (il y en a une de plus ou de moins).

2) 

On a une <u>chaîne ergodique</u> <u>périodique de période 2</u> les deux classes cycliques sont composées des états pairs et des états impairs.

Posons ${}^t\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$. L'équation ${}^t\alpha P = \alpha$ autrement dit :

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \frac{j}{N} & 0 & \frac{N-j}{N} & 0 \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$$

D'où les relations :

$$\alpha_1 \cdot \frac{1}{N} = \alpha_0 \; ; \; \alpha_0 + \frac{2}{N}\alpha_2 = \alpha_1 \; ; \; \frac{N-1}{N}\alpha_1 + \frac{3}{N}\alpha_3 = \alpha_2 \; ; \; \dots \text{etc} \; ; \dots$$

$$\alpha_{j-1}\frac{N-j+1}{N} + \alpha_{j+1}\frac{j+1}{N} = \alpha_j \; ; \text{etc} \dots$$

Ce qui donne :

$$\alpha_1 = N\alpha_0 \; ; \; \alpha_2 = \frac{N(N-1)}{2}\alpha_0 \; ; \; \alpha_3 = \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\alpha_0 \; ; \; \text{etc} \dots$$

$$\alpha_j = C_N^j \alpha_0 \; (j = 1, 2, \dots, N).$$

Or on doit avoir $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_N = 1$ donc

$$\alpha_0\left(1 + C_N^1 + C_N^2 + \dots + C_N^N\right) = 1.$$

D'où $\alpha_0 = \frac{1}{2^N}$ et $\alpha_j = \frac{1}{2^N} C_N^j \; (j \geq 1)$.

α est donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$.

b) Par un théorème du cours, le temps moyen de retour de la chaîne en i est égal à $\frac{1}{\alpha_i} = \frac{2^N}{C_N^i}$

4) D'après la formule de la probabilité totale pour l'espérance, on peut écrire

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_x \mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = x)\,\mathbb{P}(X_n = x)$$

Mais $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = x) = (x+1)\frac{N-x}{N} + (x-1)\frac{x}{N}$

(car sachant $X_n = x$, X_{n+1} prend seulement les valeurs $x+1$ (avec probabilité $\frac{N-x}{N}$) et $x-1$ (avec probabilité $\frac{x}{N}$). D'où

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_x \left(\frac{N-2}{N}x + 1\right)\mathbb{P}(X_n = x)$$

$$= \frac{N-2}{N}\sum_x x\,\mathbb{P}(X_n = x) + \sum_x \mathbb{P}(X_n = x)$$

$$(*) \quad = \frac{N-2}{N}\mathbb{E}(X_n) + 1$$

. D'où la formule demandée.

$\mathbb{E}(X_n)$ est une suite croissante et majorée par N (le nombre total de boules) donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \ell$ existe et passant à la limite dans $(*)$, on a :

$$\ell = \frac{N-2}{N}\ell + 1 \; . \text{ D'où } \ell = \frac{N}{2}.$$

Interprétation pratique de ce résultat : lorsque n est très grand, le nombre moyen de boules dans B est approximativement $\frac{N}{2}$.

Partie III

1) a) $Z = \frac{X}{Y} \mathbb{1}_{[Y\neq 0]}$ et $\mathbb{1}_{[Y\neq 0]} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(Y)$

D'où $Z = X \cdot \frac{1}{Y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(Y) = X f(Y)$ où $f : y \mapsto \frac{1}{y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(y)$.

est une fonction borélienne. D'où Z est une v.a. comme produit de deux v.a.

b) Avec les notations de a), $Z = X \cdot f(Y)$. Le Théorème du transfert assure que $Z \in \mathcal{L}^1 \iff (x,y) \mapsto x f(y)$ est intégrable pour la loi du couple (X,Y) i.e. la mesure $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dx dy$ (puisque X et Y sont indépendantes).

Or $\iint_{\mathbb{R}^2} |x||f(y)| \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dx dy =$

$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} |x| e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{|y|} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) = +\infty$ car

$\int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{|y|} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = +\infty$ (divergence en $y=0$). Donc Z n'a pas de moment d'ordre 1.

c) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée

$\mathbb{E}(h(Z)) = \int_{\Omega} h(X f(Y)) d\mathbb{P} = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x f(y)) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy$

$= \int \int h\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy$ (formule du transfert)

Faisons le changement de variable $\begin{cases} z = \frac{x}{y} \\ t = y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = zt \\ y = t \end{cases}$

Le jacobien est $\frac{D(x,y)}{D(z,t)} = \begin{vmatrix} t & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = t$

$\circledast = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(z) \frac{1}{2\pi} \underbrace{e^{-\frac{1}{2}(z^2t^2+t^2)}}_{e^{-\frac{1}{2}t^2(z^2+1)}} |t| dz dt =$

Mais l'intégration en t vaut : $\int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{-\frac{1}{2}(z^2+1)t^2} dt =$

$2 \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{1}{2}(z^2+1)t^2} dt = 2\left[-\frac{e^{-\frac{1}{2}(z^2+1)t^2}}{z^2+1} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{2}{z^2+1}$

Finalement il reste :

$\circledast = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{1}{\pi} \frac{1}{(z^2+1)} dz$

donc Z a une loi de densité $z \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2+1}$. C'est la loi de Cauchy.

2) La personne prend le métro $n = 12000$ fois le temps d'attente total $X = \sum_{i=1}^{12000} X_i$, où

$X_i =$ le temps d'attente la i^e fois

Les v.a. X_i sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Ainsi

$$E(X_i) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \text{ et } \operatorname{Var} X_i = \int_0^1 x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

D'où $E(X) = \sum_{i=1}^{12000} E(X_i) = 12000 \cdot \frac{1}{2} = 6000$ (minutes)

$\operatorname{Var} X = 12000 \cdot \frac{1}{12} = 1000$ Donc $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X} = 31,6$.

D'après le théorème limite central, on sait que

$$\frac{X - E(X)}{\sigma_X} \sim N(0,1).$$

Donc $P\left(-a \leq \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \leq a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

$= 0,997$ si $a = 3$

Il y a donc une probabilité $0,997$ pour que l'on ait l'inégalité $-3 \leq \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \leq 3$

i.e. $E(X) - 3\sigma_X \leq X \leq E(X) + 3\sigma_X$

soit $5905,2 \leq X \leq 6094,8$ (en minutes)

ou encore $4,10 \leq X \leq 4,23$ (en jours de 24H.).

3) $k = 1, 2, \dots$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $P(X = k\delta) =$

P(échec au 1er coup et ... et échec au k-1e coup et succès au ke)

$= (1-p)^{k-1} p$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\delta \cdot P(X = k\delta) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\delta \cdot (1-p)^{k-1} p$$

$$= \delta \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} p = \delta \cdot \frac{1}{p}$$

$P(X > n\delta) = P$(échec jusqu'à l'instant $n\delta$) $= (1-p)^n$. (*)

b) $E(X_m) = \frac{1}{m}\frac{1}{p_m} = \alpha > 0$. Soit $t > 0$.

$P(X_m > t)$. Faisons d'abord un raisonnement approximatif en supposant que $\frac{t}{\delta_m}$ soit un entier.

D'après (*), on a

$$P(X_m > t) = P\left(X_m > \frac{t}{\delta_m}\delta_m\right) = (1 - p_m)^{\frac{t}{\delta_m}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{m\alpha}\right)^{mt} = \left[\left(1 - \frac{1/\alpha}{m}\right)^m\right]^t \xrightarrow[m \to +\infty]{} e^{-\frac{1}{\alpha}t}.$$

D'où $\lim_{m \to +\infty} P(X_m \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}t}$ = la fonction de répartition d'une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{\alpha}$.

Donc X_m converge en loi vers une v.a. exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

Le raisonnement rigoureux est le suivant :

Soit $t > 0$ fixé. Etant donné $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier n_m tel que $\frac{n_m}{m} \leq t < \frac{n_m + 1}{m}$ (*)

Par définition $\left|t-\frac{n_m}{m}\right|<\frac{1}{m}$ donc $\lim_{m\to+\infty}\frac{n_m}{m}=t$.

De plus l'inégalité ⊛ implique les inclusions d'événements :

$$\left[X_m>\frac{n_m+1}{m}\right]\subset\left[X_m>t\right]\subset\left[X_m>\frac{n_m}{m}\right],$$

d'où

$$\mathbb{P}\left(X_m>\frac{n_m+1}{m}\right)\leq\mathbb{P}(X_m>t)\leq\mathbb{P}\left(X_m>\frac{n_m}{m}\right)$$

et comme $\delta_m=\frac{1}{m}$, on obtient

$$(1-p_m)^{n_m+1}\leq\mathbb{P}(X_m>t)\leq(1-p_m)^{n_m}$$

Comme on l'a fait dans le raisonnement précédent au milieu de la page 10, on montre de même que

$$\lim_{m\to+\infty}(1-p_m)^{n_m+1}=\lim_{m\to+\infty}(1-p_m)^{n_m}=\lim_{m\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1/\alpha}{m}\right)^m\right]^t$$
$$=e^{-\frac{1}{\alpha}t}.$$

<u>Interprétation pratique du résultat</u> : si le temps est discrétisé et que l'unité de temps est $\frac{1}{m}$ (seconde) (m grand) et qu'à chaque instant un événement S (comme succès) de probabilité petite de la forme $p_m=\frac{1}{\alpha m}$ est susceptible de se produire, l'instant du premier succès est approximativement de loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{\alpha}$. <u>Par exemple</u> la loi de la désintégration radioactive est de ce type (voir un cours de physique du premier cycle L1-L2)