Probabilités 1 Corrigé de l'épreuve du 9/06/09 (2e session) ①

Exercice 1 :

1) Pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$[X=k]=[X_1=0]\cap\cdots\cap[X_{k-1}=0]\cap[X_k=1]$$

et par l'indépendance des v.a. (X_n) :

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X_1=0)\cdots\mathbb{P}(X_{k-1}=0)\mathbb{P}(X_k=1)$$
$$=(1-p)^{k-1}p.$$

$$G_X(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)t^k=\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p\,t^k=$$
$$pt\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)t)^{k-1}=pt\frac{1}{1-(1-p)t}=\frac{pt}{1-qt}\quad(q=1-p).$$

(la série converge si $|(1-p)t|<1$ i.e. $|t|<\frac{1}{1-p}$).

Calculons les dérivées de G_X :

$$G_X'(t)=\frac{p}{(1-qt)^2}$$
$$G_X''(t)=\frac{2pq}{(1-qt)^3}.$$

Comme G_X est définie au voisinage de $t=1$ (car $\frac{1}{1-p}>1$)

$\mathbb{E}(X)$ et $\operatorname{Var}X$ existent et :

$$\mathbb{E}(X)=G_X'(1)=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$

$$\operatorname{Var}X=G_X''(1)+G_X'(1)-(G_X'(1))^2=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

②

2) a) Soient $k,\ell\geq 1$ des entiers. On a :

$$[X=k]=\bigcap_{i=1}^{k-1}[X_i=0]\cap[X_k=1]$$
$$[Y=\ell]=\bigcap_{j=k+1}^{k+\ell-1}[X_j=0]\cap[X_{k+\ell}=1]\quad(*)$$

L'indépendance des v.a. (X_n) implique que les événements $[X=k]$ et $[Y=\ell]$ sont indépendants.

Donc les v.a. X et $Y=U-X$ sont indépendantes.

b) $U=X+Y$ et comme X et Y sont indépendantes, un théorème de cours donne :

$$G_U(t)=G_X(t)G_Y(t)=(G_X(t))^2,$$

car X et Y ont la même loi (cela se voit par exemple grâce à $(*)$ qui implique $\mathbb{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ et $\mathbb{P}(Y=\ell)=(1-p)^{\ell-1}p$).

Donc $G_U(t)=\dfrac{p^2t^2}{(1-qt)^2}.$

Grâce à la série entière bien connue $(1+x)^\alpha \overset{(**)}{=}$
$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$, On a :

$$G_U(t)=p^2t^2\Big(1-2(-qt)+\frac{(-2)(-3)}{2!}(-qt)^2+\cdots+$$
$$\frac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-qt)^n+\cdots\Big)\quad((**)\text{ avec }\alpha=-2\text{ et }x=qt)$$

$$= p^2t^2 + 2p^2qt^3 + 3p^2q^2t^4 + \dots + (n+1)p^2q^nt^{n+2} + \dots$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\mathbb{P}(U=0) = \mathbb{P}(U=1) = 0, \quad \mathbb{P}(U=2) = p^2,$$

$$\mathbb{P}(U=3) = 2p^2q, \quad \mathbb{P}(U=4) = 3p^2q^2, \dots$$

$$\mathbb{P}(U=n+2) = (n+1)p^2q^n \quad (\forall n \geq 0).$$

<u>Exercice 2 :</u>

1) a) La suite des frappes peut être modélisée par une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$ avec $X_n = 1$ s'il y a une faute à la frappe n° n et $X_n = 0$ sinon. Alors

$$N = \sum_{i=1}^{1000} X_i$$

est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(1000, p=10^{-3})$. Dans ces conditions, on a :

$$\mathbb{E}(N) = 1000.p = 1, \quad \text{Var } N = 1000p(1-p) = \frac{999}{1000} = 0,999.$$

b) D'après le cours, on sait que si B_n est une v.a. $\mathcal{B}(n, p_n)$ telle que $np_n \to \lambda > 0$ $(n \to +\infty)$ alors $\mathbb{P}(B_n = k) \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(n \to +\infty)$. Comme $n = 1000$ est grand, on a approximativement $P(N=k) \# e^{-1}\frac{1}{k!}$ $(k \in \mathbb{N})$. Avec cette approximation :

$$\mathbb{P}(N>3) = 1 - \mathbb{P}(N \leq 3)$$

$$= 1 - \left(e^{-1} + e^{-1} + e^{-1}\frac{1}{2!} + e^{-1}\frac{1}{3!}\right)$$

$$= 1 - e^{-1}\left(2 + \frac{8}{12}\right) = 1 - e^{-1}\frac{8}{3} \# 1 - \frac{8}{3.2,718} = 0,0188.$$

2) Introduisons une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes $(\chi_i)_{i\geq 1}$ de loi $\mathbb{P}(\chi_i = 1) = 0,2$ et $\mathbb{P}(\chi_i = 0) = 0,8$.

Pratiquement $\chi_i = 1$ signifie "la faute n° i n'est pas détectée" (donc elle subsiste) et $\chi_i = 0$ si "la faute n° i est détectée". Ainsi

$$N_1 = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_N$$

et la v.a. N est indépendante des χ_i. Si G_N est la fonction génératrice de N et si $G(t) = 0,8 + 0,2t$ la fonction génératrice des χ_i, un résultat du cours nous assure que

$$G_{N_1}(t) = G_N \circ G(t) = G_N(G(t)) = \left(1 - 10^{-3} + 10^{-3}G(t)\right)^{1000}$$

$$= \left(1 - 10^{-3} + 10^{-3}(0,8 + 0,2t)\right)^{1000} = \left(1 - 0,2.10^{-3} + 0,2.10^{-3}t\right)^{1000}$$

donc N_1 est de loi $\mathcal{B}(1000, p_1 = 0,2.10^{-3})$.

Par récurrence en procédant de même, on démontre facilement que N_n est de loi $\mathcal{B}(1000, p_n = (0,2)^n . 10^{-3})$

Exercice 3:

1) La succession des changements de voiture est modélisée par la chaîne de Markov à 4 états de matrice:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2) a) Cette chaîne de Markov est ergodique car tous ses coefficients sont >0. Elle a donc une loi stationnaire $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ telle que $\alpha P = \alpha$. En résolvant, on a:

$$(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

c'est donc la loi uniforme sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ des marques de voitures.

b) D'après un résultat du cours, le représentant aura une autre voiture A en moyenne au bout de $m_{ii} = \frac{1}{\alpha_i} = 4$ ans.

3) Si dès qu'il a une voiture de marque D, il ne change plus de marque, on doit rendre l'état D absorbant dans la chaîne précédente, ce qui donne une nouvelle chaîne de Markov de matrice:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons la matrice $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et

$I - Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. La matrice fondamentale de la chaîne absorbante est $N = (I-Q)^{-1}$. Pour inverser $I-Q$, il est conseillé de résoudre le système linéaire:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z = X \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z = Y \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z = Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z = X + Y + Z \quad (*)$$

et en faisant les différences des lignes deux à deux:

$$\frac{4}{6}(y-z) = Y - Z, \ \frac{4}{6}(x-z) = X - Z, \ \frac{4}{6}(x-y) = X - Y.$$

D'où en exprimant y et z en fonction de x, X, Y, Z et en reportant dans la première relation $(*)$:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}(X-Y) - \frac{1}{4}(X-Z) = X + Y + Z$$

Soit $x = 3X + \frac{3}{2}Y + \frac{3}{2}Z$.

D'où la 1ère ligne de $(I-Q)^{-1}$: $\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

On n'a pas besoin de calculer les autres lignes car on sait que le temps moyen pour être absorbé est $m_D = 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 6$.

Exercice 4 : (7)

1) Le couple (X,Y) a une densité de la forme

$$(x,y) \mapsto e^{-x}e^{-y}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y) = f(x,y)$$

(car les v.a. X et Y sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$).

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Alors

$$\mathbb{E}(g(U_1)) = \mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right) = \iint_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right) f(x,y)\,dx\,dy$$

(d'après la formule du transfert). D'où :

$$\mathbb{E}(g(U_1)) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g\left(\frac{x}{y}\right) e^{-(x+y)}\,dx\,dy$$

Posons $u = \frac{x}{y}$ et $v = y$. Le jacobien de ce changement de variable vaut :

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \det\begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v.$$

D'où

$$\mathbb{E}(g(U_1)) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(u) e^{-(uv+v)}\, v\,du\,dv =$$

$$\int_0^{\infty} g(u)\left(\int_0^{\infty} e^{-v(1+u)}\, v\,dv\right)du = \int_0^{\infty} g(u)\frac{1}{(1+u)^2}\,du.$$

Ce qui montre que U_1 a une densité $f_{U_1}(u) = \frac{1}{(1+u)^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)$.

(8)

2) $\mathbb{E}(g(U_2)) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x+y)\, e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$

Faisons le changement de variable $u = x+y$, $v = y$, de jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(g(U_2)) = \iint_{\begin{cases} 0 \leq u \\ 0 \leq v \leq u \end{cases}} g(u) e^{-u}\,du\,dv = \int_0^{+\infty} g(u)\, u e^{-u}\,du.$$

Donc U_2 a une densité $f_{U_2}(u) = u e^{-u}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)$.

3) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$F_{U_4}(t) = \mathbb{P}(\max(X,Y) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t, Y \leq t) = (F_X(t))^2.$$

F_X est dérivable (loi exponentielle) donc F_{U_4} est dérivable et sa dérivée est la densité de U_4 : $f_{U_4}(t) = 2F_X(t)F_X'(t) =$

$$\begin{cases} 2(1-e^{-t})e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

De même

$$F_{U_5}(t) = 1 - \mathbb{P}(U_5 > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) =$$

$$1 - (\mathbb{P}(X > t))^2 = 1 - (1 - F_X(t))^2 = -F_X^2(t) + 2F_X(t).$$

Cette fonction est dérivable (sauf en $t = 0$) et donc U_5 a une densité donnée par :

$$f_{U_5}(t) = \begin{cases} 2e^{-t} - 2(1-e^{-t})e^{-t} = 2e^{-2t} & \text{si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

($\Rightarrow U_5 \sim$ loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.)