Corrigé de l'épreuve de Probabilités 2 du 15/06/2011

Exercice 1 : Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, la combinaison linéaire

$$\alpha(aR+bV)+\beta R=\alpha(atV+aB+bV)+\beta(tV+B)$$
$$=(\alpha at+\alpha b+\beta t)V+(\alpha a+\beta)B$$

est aussi combinaison linéaire de V et B donc est une variable aléatoire normale puisque V et B sont des v.a. normales indépendantes (donc le couple (V,B) est gaussien). Par définition d'un vecteur gaussien ceci montre que le couple $(aR+bV,R)$ est gaussien. Son vecteur moyenne est

$$\tilde m=(\mathbb{E}(aR+bV),\mathbb{E}(R))$$

Or $\mathbb{E}(aR+bV)=a\,\mathbb{E}(R)+b\,\mathbb{E}(V)=a(t\,\mathbb{E}(V)+\mathbb{E}(B))+b\,\mathbb{E}(V)$

$$=(at+b)\mathbb{E}(V)+a\,\mathbb{E}(B)=(at+b)m$$

D'où $\tilde m=(m(at+b),mt)$.

Sa matrice des covariances est donnée par :

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(aR+bV) & \mathrm{cov}(aR+bV,R)\\ \mathrm{Cov}(aR+bV,R) & \mathrm{Var}\,R\end{pmatrix}$$

On a : • $\mathrm{Var}(aR+bV)=\mathrm{Var}((at+b)V+aB)=(at+b)^2\mathrm{Var}(V)+a^2\mathrm{Var}(B)$ ↳ indépendance de V et B

$$=\sigma^2(at+b)^2+a^2t$$

• $\mathrm{Var}\,R=t^2\mathrm{Var}(V)+\mathrm{Var}(B)=\sigma^2t^2+t$

• $\mathrm{Cov}(aR+bV,R)=\mathrm{cov}((at+b)V+aB,\,tV+B)$

$$=\mathbb{E}\Big[\big((at+b)V+aB-m(at+b)\big)\big(tV+B-mt\big)\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[\big((at+b)(V-m)+aB\big)\big(t(V-m)+B\big)\Big]=$$
$$=\sigma^2t(at+b)+at$$

Finalement $\Gamma=\begin{pmatrix}\sigma^2(at+b)^2 & \sigma^2t(at+b)+at\\ \sigma^2t(at+b)+at & \sigma^2t^2+t\end{pmatrix}$

2) Comme le couple $(aR+bV,R)$ est gaussien, les variables aléatoires $aR+bV$ et R sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(aR+bV,R)=0$ c'est à dire $\sigma^2t(at+b)+at=0$

$\iff a(\sigma^2t^2+t)=-b\sigma^2t \iff a(\sigma^2t+1)=-b\sigma^2$ (car $t\neq0$)

$\iff a=-\dfrac{b\sigma^2}{t\sigma^2+1}$ ⊛

3) Si a et b sont liées par la relation ⊛, $aR+bV$ et R sont indépendants et d'après un résultat du cours, on a

$$\mathbb{E}(aR+bV\mid R)=\mathbb{E}(aR+bV)=(at+b)m \quad \text{(question 1)}$$

D'autre part $\mathbb{E}(aR+bV\mid R)=a\underbrace{\mathbb{E}(R\mid R)}_{R}+b\,\mathbb{E}(V\mid R)$ (linéarité de l'espérance conditionnelle)

D'où $aR+b\,\mathbb{E}(V\mid R)=(at+b)m$

i.e. $\mathbb{E}(V\mid R)=-\dfrac{a}{b}R+m\left(\dfrac{at+b}{b}\right)=-\dfrac{a}{b}R+m\left(\dfrac{a}{b}t+1\right)$

$$=\frac{\sigma^2}{t\sigma^2+1}R+m\left(\frac{-\sigma^2t}{t\sigma^2+1}+1\right)=\frac{\sigma^2R}{t\sigma^2+1}+\frac{m}{t\sigma^2+1}$$

Compte tenu de la relation ⊛.

Exercice 2 : 1) $f(x,1)=(1+\mu+\sigma)x$ et $f(x,-1)=(1+\mu-\sigma)x$

Comme on a $|\sigma|<1+\mu$ par hypothèse ceci implique

$-\sigma\leq|\sigma|<1+\mu$ donc $1+\mu+\sigma\geq0$

et $\sigma\leq|\sigma|<1+\mu$ donc $1+\mu-\sigma\geq0$

D'où $f(x,1)\geq 0$ et $f(x,-1)\geq 0$ pour tout $x\geq 0$ (*)

Or $S_n = \begin{cases} f(S_{n-1},1) & \text{si } \varepsilon_n = 1 \\ f(S_{n-1},-1) & \text{si } \varepsilon_n = -1. \end{cases}$

Si par hypothèse de récurrence $S_{n-1} \overset{p.s}{\geq} 0$, on déduit de (*) que $S_n \overset{p.s}{\geq} 0$. Donc $S_n \overset{p.s.}{\geq} 0$ pour tout entier n.

2) a) $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(S_n - S_{n-1}) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(\mu S_{n-1} + \sigma S_{n-1}\varepsilon_n)$

$= \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}((\mu+\sigma\varepsilon_n)S_{n-1}) = S_{n-1}\,\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(\mu+\sigma\varepsilon_n) = S_{n-1}\,\mathbb{E}(\mu+\sigma\varepsilon_n)$

car S_{n-1} est $\mathcal{B}_n$-mesurable et ε_n est indépendante de $\mathcal{B}_n$ (théorème du cours). Mais $\mathbb{E}(\mu+\sigma\varepsilon_n) = \mu + \sigma\,\mathbb{E}(\varepsilon_n) = \mu$

b) Conclusion : $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(S_n - S_{n-1}) = \mu S_{n-1}$. On a donc

(S_n) est une sous-martingale si $\mu > 0$

(S_n) est une martingale si $\mu = 0$

(S_n) est une sur-martingale si $\mu < 0$.

3) $\ln(S_n) = \ln(S_{n-1}) + \ln(1+\mu+\sigma\varepsilon_n)$ c'est à dire

$Z_n = Z_{n-1} + \ln(1+\mu+\sigma\varepsilon_n)$. (**)

Comme $\mathcal{B}_{n-1}$ et ε_n sont indépendantes, la v.a. $\ln(1+\mu+\sigma\varepsilon_n)$ est indépendante de la tribu $\mathcal{B}_{n-1}$ et on a donc

$\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n-1}}(Z_n - Z_{n-1}) = \mathbb{E}(\ln(1+\mu+\sigma\varepsilon_n))$

$= \frac{1}{2}[\ln(1+\mu+\sigma) + \ln(1+\mu-\sigma)] = \frac{1}{2}\ln[(1+\mu)^2 - \sigma^2]$

D'où $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_{n-1}}(Z_n - Z_{n-1}) = \ln\lambda$

Ainsi : (Z_n) est $\begin{cases} \text{une martingale si } \lambda = 1 \\ \text{une sous-martingale si } \lambda > 1 \\ \text{une sur-martingale si } \lambda < 1 \end{cases}$

4) a) $S_n = S_{n-1}(1+\mu+\sigma\varepsilon_n)$ implique $S_n^2 = S_{n-1}^2(1+\mu+\sigma\varepsilon_n)^2$

d'où $\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}(S_{n-1}^2)\,\mathbb{E}((1+\mu+\sigma\varepsilon_n)^2)$ (indépendance de ε_n et S_{n-1})

$= \mathbb{E}(S_{n-1}^2)\left[\frac{1}{2}\left((1+\mu+\sigma)^2 + (1+\mu-\sigma)^2\right)\right] = \mathbb{E}(S_{n-1}^2)\left((1+\mu)^2+\sigma^2\right)$

Ceci implique $\mathbb{E}(S_n^2) = s_0^2[(1+\mu)^2+\sigma^2]^n$ et en particulier on obtient $S_n \in L^2$.

b) La suite $\mathbb{E}(S_n^2)$ est bornée si et seulement si $[(1+\mu)^2+\sigma^2] \leq 1$

(S_n) est une martingale bornée dans L^2 si et seulement si $\mu = 0$ (question 1) et $1+\sigma^2 \leq 1$ ($\mathbb{E}(S_n^2)$ est bornée).

5) En sommant les accroissements $Z_n - Z_{n-1}$ et en utilisant la formule (**) (page 3), on obtient :

$$Z_n = Z_0 + \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\mu+\sigma\varepsilon_k)$$

Mais les v.a. $\ln(1+\mu+\sigma\varepsilon_k)$ sont indépendantes et de même loi d'espérance $\mathbb{E}(\ln(1+\mu+\sigma\varepsilon_1)) = \ln\lambda$. La LFGN implique $\frac{Z_n}{n} \longrightarrow \ln\lambda$ p.s. quand $n \to +\infty$. Si $\lambda = 1$, on obtient $\frac{Z_n}{n} \longrightarrow 0$ p.s d'où $\frac{1}{n}\ln S_n = \ln S_n^{1/n} \longrightarrow 0$ p.s, ce qui implique $S_n^{1/n} \longrightarrow 1$ p.s. (quand $n \to +\infty$).