Corrigé de l'épreuve de Probabilités 1 du 6/01/2011 (Master 1) ①

Ex1 : 1) si $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A) = 0$ (lemme de Borel-Cantelli : voir le cours ou le formulaire !)

2) D'après la propriété de continuité de $\mathbb{P}$ par limite décroissante, on a

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k\geq n} A_k^c\Big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\Big).$$

Mais $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\Big) = \prod_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k^c)$ (indépendance des A_n^c)

$$= \prod_{k=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\left(\sum_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k)\right)} \longrightarrow 0 \text{ quand } N\to+\infty.$$

(car $\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k) \to +\infty$ comme reste d'une série divergente).

3) On déduit de 2) que $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_n \Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big)\Big) = 0$ (comme réunion dénombrable d'ensembles de probabilité nulle).

D'où $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1$.

Ex2 : 1)a) $Var(S_n) = \sum_{k=2}^{n} Var(X_k)$ (car les X_k sont indép^ts)

et $Var X_k = \mathbb{E}(X_k^2) = \frac{k^2}{k\ln(k)} = \frac{k}{\ln(k)} \leq \frac{n}{\ln(n)}$ $\forall k \leq n$ (croissance
(car $\mathbb{E}(X_k)=0$)

de la fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$) et comme il y a $n-1$ termes dans la somme donnant $Var(S_n)$, on obtient immédiatement :

②

$$Var(S_n) \leq (n-1)\frac{n}{\ln(n)} \leq \frac{n^2}{\ln(n)}$$

b) $Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(S_n) \leq \frac{1}{\ln(n)}$. D'autre part on a aussi : $Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right)$ car $\frac{S_n}{n}$ est centrée. On a donc $\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right) \longrightarrow 0$ si $n\to+\infty$, i.e. $\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0$ dans L^2 quand $n\to+\infty$, ce qui implique $\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0$ en probabilité (d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

2) $\mathbb{P}(|X_n|\geq n) = \mathbb{P}(|X_n| = n) = \frac{1}{n\ln(n)}$ donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n|\geq n) = +\infty$ (série de Bertrand divergente). Mais on peut écrire $[|X_n|\geq n] = A_n = [|S_n - S_{n-1}| \geq n]$ et d'après l'exercice 1 :

$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$

Si $\omega \in A = \limsup A_n$, $|S_n(\omega) - S_{n-1}(\omega)| \geq n$ pour une infinité d'indices n donc $\frac{S_n(\omega)}{n}$ ne peut pas converger, d'où le résultat.

Partie II

Ex3 : 1) $f(\ell) = 1$ et $f(i) = 0$ si $i \in R\setminus\{\ell\}$ (évident).

Soit A l'événement "être absorbé en ℓ". On a :

$\mathbb{P}(A | X_0 = i) = f(i)$

Avec le système complet d'événements $A_j = [X_1 = j]$ ($j\in E$), la formule de la probabilité totale donne (pour $i \notin R$) :

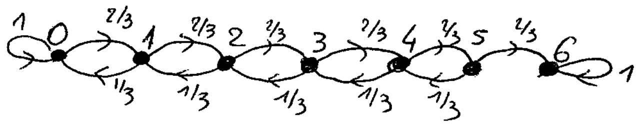
$$\mathbb{P}(A|X_0=i) = \sum_{j\in E} \mathbb{P}(A\cap[X_1=j]|X_0=i)$$

$$= \sum_{j\in E} \underbrace{\mathbb{P}(A|X_1=j, X_0=i)}_{\mathbb{P}(A|X_1=j)} \underbrace{\mathbb{P}(X_1=j|X_0=i)}_{p(i,j)}$$

$\mathbb{P}(A|X_1=j)\, p(i,j)$ (propriété de Markov)

$$= \sum_{j\in E} f(j)\, p(i,j)$$ (homogénéité et oubli du passé)

2)



Ici on a $f(0)=0$, $f(6)=1$ et on pose $x=f(1)$.

Alors $f(1) = \frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2}x$

$f(2) = \frac{1}{3}f(1) + \frac{2}{3}f(3) \Rightarrow f(3) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)x$

$f(3) = \frac{1}{3}f(2) + \frac{2}{3}f(4) \Rightarrow f(4) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\right)x$

$f(4) = \frac{1}{3}f(3) + \frac{2}{3}f(5) \Rightarrow f(5) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^4 - \frac{25}{8}\right)x$

$f(5) = \frac{1}{3}f(4) + \frac{2}{3}f(6) \Rightarrow 1 = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^5 - \frac{45}{8}\right]x$

D'où $x = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^5 - \frac{45}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{63}{32}\right)^{-1} = \frac{32}{63} \# 0,508$.

EX4 : 1) a) le nombre X_{n+1} de mouches possédant le gène A à la génération $n+1$ ne dépend que X_n donc (X_n) est une chaîne de Markov. Notons χ_j la v.a. indicatrice $(1\le j\le N)$

$$\chi_j = \begin{cases} 1 & \text{si la mouche n°}j \text{ de la génération } n+1 \text{ possède le gène A} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par hypothèse les χ_j sont indépendantes et de loi de

Bernoulli de paramètre $\frac{i}{N} = p$. (*)

Ainsi sachant $X_n = i$, $X_{n+1} = \chi_1 + \dots + \chi_N$ (somme de Bernoulli indépendantes) est de loi binomiale $\mathcal{B}(N,p) = \mathcal{B}(N, \frac{i}{N})$ donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=i) = C_N^j \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1-\frac{i}{N}\right)^{N-j}$$

b) Les états absorbants sont 0 et N d'après les conditions d'expériences décrites : si à une certaine génération n, on a $X_n = 0$ (resp. $X_n = N$) ceci signifie qu'aucune mouche ne possède le gène A (resp. toutes les mouches possèdent le gène A) et à la génération suivante X_{n+1} est une somme de v.a. de Bernoulli de paramètre $p=0$ (resp. $p=1$) donc $X_{n+1} = 0$ (resp. $X_{n+1} = N$).

2) Considérons le système complet d'événements $A_i = [X_{n-1} = i]$ $(0 \le i \le N)$.

D'après la formule de l'espérance totale :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{E}(X_n|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Mais $\mathbb{E}(X_n|A_i) = \mathbb{E}(X_n|X_{n-1}=i) = \frac{i}{N}.N = i$ (espérance d'une loi Binomiale $\mathcal{B}(N, p=\frac{i}{N})$). Donc

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=0}^{N} i\, \mathbb{P}(X_{n-1}=i) = \mathbb{E}(X_{n-1})$$

d'où $\mathbb{E}(X_n) = \text{constante} = \mathbb{E}(X_0)$.

3) $N=3$. La chaîne de Markov a 4 états 0, 1, 2 et 3.

Les probabilités de transition sont :

$p(1,0) = C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$; $p(1,3) = C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$; $p(1,1) = C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $p(1,2) = C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3} = \frac{2}{3^2}$; $p(2,0) = C_3^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}$;

$p(2,3) = C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$; $p(2,1) = C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3^2}$; $p(2,2) = C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

La matrice des transitions écrite sous forme canonique (i.e. en commençant par les états absorbants) est :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 3 & 1 & 2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \left(\frac{2}{3}\right)^3 & \left(\frac{1}{3}\right)^3 & \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \frac{2}{3^2} \\ \frac{1}{3^3} & \left(\frac{2}{3}\right)^3 & \frac{2}{3^2} & \frac{4}{3^2} \end{array}\right) \end{array}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \frac{2}{3^2} \\ \frac{2}{3^2} & \frac{4}{3^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3^2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I - Q = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (I-Q)^{-1} = 9\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{9}{21}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = N$$

$$A = NR = \frac{9}{21}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{8}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{8}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Donc $A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$. La probabilité partant de 1 d'être absorbé en 0 est $\frac{2}{3}$.