Espaces de Hilbert : Corrigé du Partiel du samedi 7 Mars 2009

I) utilisation triviale de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^d$ avec le produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$

II) C'est l'inégalité du parallélogramme (voir le cours)

III) $P_V(x)$ est l'unique vecteur de V tel que $x - P_V(x) \in V^\perp$.

Considérons le vecteur $P_{V_1}(x) + P_{V_2}(x)$ de V

- Soit y un vecteur quelconque de V. Il s'écrit $y = y_1 + y_2$. Calculons

$$\langle x - (P_{V_1}(x) + P_{V_2}(x)), y\rangle$$

$$= \langle x - P_{V_1}(x) - P_{V_2}(x), y_1 + y_2\rangle$$

$$= \underbrace{\langle x - P_{V_1}(x), y_1\rangle}_{a} + \langle x, y_2\rangle - \underbrace{\langle P_{V_1}(x), y_2\rangle}_{b}$$

$$- \underbrace{\langle P_{V_2}(x), y_1\rangle}_{c} - \langle P_{V_2}(x), y_2\rangle$$

$$= \langle x, y_2\rangle - \langle P_{V_2}(x), y_2\rangle = \underbrace{\langle x - P_{V_2}(x), y_2\rangle}_{d}$$

$$= 0$$

car $a = 0$ par la propriété caractéristique de la projection orthogonale sur V_1

$b = 0$ et $c = 0$ car V_1 et V_2 sont orthogonaux

enfin $d = 0$ par la propriété caractéristique de la projection sur V_2.

Conclusion : $P_{V_1}(x) + P_{V_2}(x)$ vérifie la propriété caractéristique de la projection sur V donc

$$P_{V_1}(x) + P_{V_2}(x) = P_V(x).$$

IV) C'est l'exercice fait le 18.02.09

V) a)

$$\sum_{k=1}^{N} \left|\frac{x_k}{k}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$$

$$\leq \|x\|^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < +\infty$$

car la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k}$ est donc absolument convergente (autrement dit normalement convergente) dans $\mathbb{C}$ donc elle est convergente (puisque $\mathbb{C}$ est complet)

Remarque importante : Ceux qui écrivent des choses du genre :

« $\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k}\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < +\infty$

donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k}$ converge »

n'ont rien démontré !!! (voir une remarque analogue que j'ai déjà faite dans le corrigé de l'épreuve d'espaces métriques)

b) le vecteur $v = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$ appartient à ℓ^2 car la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est convergente. Par définition, on voit que

$$V = \{v\}^{\perp} \text{ (l'orthogonal de } v\text{)}$$

donc V est un sous-espace fermé (comme tout orthogonal d'une partie quelconque d'un espace de Hilbert). On a aussi évidemment

$$V = D^{\perp}$$

où $D = \mathbb{C}v$ la droite engendrée par v

Donc $V^{\perp} = D^{\perp\perp} = D$ (thm du cours)

c) $e = \frac{v}{\|v\|} = \sqrt{\frac{6}{\pi^2}}\, v$ est unitaire donc constitue une base orthonormale de $D = V^{\perp}$.

On a donc

$$\begin{aligned} P_{V^{\perp}}(x) &= \langle x, e\rangle e \\ &= \frac{1}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle v \\ &= \frac{6}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}\right) v \\ &= \frac{6}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}\right)\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1} \end{aligned}$$

Remarque : on a utilisé le fait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ mais il n'était pas exigé de connaître cette valeur exacte.