Espaces de Hilbert corrigé de l'épreuve du 3 Mai 2010

Exercice I partie A :

1) $x_1+x_2=0 \iff \langle x, e^{(1)}\rangle + \langle x, e^{(2)}\rangle = 0 \iff \langle x, e^{(1)}+e^{(2)}\rangle = 0$ $\iff x \perp e^{(1)}+e^{(2)}$. De même $x_2+x_3=0 \iff x \perp e^{(2)}+e^{(3)}$.

D'où :

$V = V[e^{(1)}+e^{(2)}, e^{(2)}+e^{(3)}]^{\perp}$ (orthogonal du s.e.v engendré par les vecteurs $e^{(1)}+e^{(2)}$ et $e^{(2)}+e^{(3)}$).

Donc V est un s.e.v. fermé de ℓ^2 comme tout orthogonal d'une partie quelconque de ℓ^2 (thm. du cours).

2) $x \in V$ s'écrit $x = (x_1, -x_1, x_1, x_4, x_5, \dots, x_n, \dots)$,

d'où $$x = x_1 e^{(1)} - x_1 e^{(2)} + x_1 e^{(3)} + \sum_{n=4}^{+\infty} x_n e^{(n)}$$
$$= x_1\left(e^{(1)} - e^{(2)} + e^{(3)}\right) + \sum_{n=4}^{+\infty} x_n e^{(n)}$$
$$= \sqrt{3}\, x_1 \frac{e^{(1)} - e^{(2)} + e^{(3)}}{\sqrt{3}} + \sum_{n=4}^{+\infty} x_n e^{(n)} \quad (*)$$

Les vecteurs $\frac{e^{(1)} - e^{(2)} + e^{(3)}}{\sqrt{3}}$ et $(e^{(n)})_{n \geq 4}$ forment une famille orthonormale ; l'écriture $(*)$ implique que ces vecteurs forment une base hilbertienne de V.

3) $V^{\perp} = V[e^{(1)}+e^{(2)}, e^{(2)}+e^{(3)}]^{\perp\perp} = V[e^{(1)}+e^{(2)}, e^{(2)}+e^{(3)}]$

car $V[e^{(1)}+e^{(2)}, e^{(2)}+e^{(3)}]$ est un s.e.v. fermé (puisqu'il est de dimension finie) et un théorème du cours nous

apprend que si F est un s.e.v. fermé, alors $F^{\perp\perp} = F$.

On a $\dim V^{\perp} = 2$ puisque les vecteurs $e^{(1)}+e^{(2)}$ et $e^{(2)}+e^{(3)}$ sont linéairement indépendants. En effet si λ et μ sont des scalaires tels que $\lambda(e^{(1)}+e^{(2)}) + \mu(e^{(2)}+e^{(3)}) = 0$, on a $\lambda e^{(1)} + (\lambda+\mu) e^{(2)} + \mu e^{(3)} = 0$ donc $\lambda = 0, \lambda+\mu = 0, \mu = 0$ puisque $e^{(1)}, e^{(2)}$ et $e^{(3)}$ sont linéairement indépendants.

Partie B :

1) $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4, \dots, \frac{1}{n}x_n + \frac{n-1}{n}x_{n+1}, \dots\right)$

$$\|Ax\|^2 = |x_1|^2 + \left|\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right|^2 + \left|\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4\right|^2 + \dots + \left|\frac{1}{n}x_n + \frac{n-1}{n}x_{n+1}\right|^2 + \dots$$

Notons qu'on peut écrire

$$\left|\frac{1}{n}x_n + \frac{n-1}{n}x_{n+1}\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}x_n + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}x_{n+1}\right|^2$$
$$\leq \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{|x_n|^2}{n} + \frac{n-1}{n}|x_{n+1}|^2\right)$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{C}^2$ $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n, \sqrt{\frac{n-1}{n}}x_{n+1}\right)$). Il en résulte que

$$\|Ax\|^2 \leq |x_1|^2 + \frac{|x_2|^2}{2} + \frac{|x_3|^2}{2} + \frac{|x_3|^2}{3} + \frac{2}{3}|x_4|^2 + \frac{1}{4}|x_4|^2 + \dots + \frac{|x_n|^2}{n} + \frac{n-1}{n}|x_{n+1}|^2$$
$$+ \frac{1}{n+1}|x_{n+1}|^2 + \frac{n}{n+1}|x_{n+2}|^2 + \dots$$

$$\leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots + |x_n|^2 + \dots = \|x\|^2 < +\infty.$$

2) Donc $Ax \in \ell^2$. De plus l'application $x \longmapsto Ax$ est clairement linéaire et l'inégalité $\|Ax\| \leq \|x\|$ vue précédemment prouve que A est un opérateur continu

et qu'on a $|||A||| \leq 1$. $(*)$

Or pour $x = e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ on a $\|x\| = 1$ et

$Ax = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ donc $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = |||A||| \geq 1$.

On déduit de $(*)$ que

$|||A||| = 1$.

3) Pour $x, y \in \ell^2$, on a :

$$\langle Ax, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + \left(\tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3\right)\overline{y_2} + \left(\tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{2}{3}x_4\right)\overline{y_3} + \cdots + \left(\tfrac{1}{n}x_n + \tfrac{n-1}{n}x_{n+1}\right)\overline{y_n} + \cdots$$

$$= x_1 \overline{y_1} + x_2 \tfrac{1}{2}\overline{y_2} + x_3\left(\tfrac{1}{2}\overline{y_2} + \tfrac{1}{3}\overline{y_3}\right) + \cdots + x_n\left(\tfrac{n-2}{n-1}\overline{y_{n-1}} + \tfrac{1}{n}\overline{y_n}\right) + \cdots$$

$= \langle x, A^*y \rangle$. Par identification, on obtient

$$A^*y = \left(y_1, \tfrac{1}{2}y_2, \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{3}y_3, \dots, \tfrac{n-2}{n-1}y_{n-1} + \tfrac{1}{n}y_n, \dots\right),$$

d'où les coordonnées de A^*y dans la base hilbertienne canonique :

$$(A^*y)_1 = y_1,\ (A^*y)_2 = \tfrac{1}{2}y_2,\ (A^*y)_3 = \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{3}y_3, \dots,$$

$$(A^*y)_n = \frac{n-2}{n-1}y_{n-1} + \frac{1}{n}y_n, \dots \ (n \geq 2)$$

Exercice 2 Partie A

1) V est l'ensemble des fonctions f telles que $f \perp \cos$ et $f \perp \sin$. Donc $V = V[\cos, \sin]^{\perp}$ (orthogonal du s.e.v. engendré par les fonctions $\cos$ et $\sin$).
V est un s.e.v. fermé comme tout orthogonal d'une partie quelconque de H.

2) Si on écrit les fonctions $\cos$ et $\sin$ et f dans la base hilbertienne canonique

$$\cos = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_{-1}), \quad \sin = \tfrac{1}{2i}(e_1 - e_{-1})$$

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n, \quad \text{où } a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt,$$

les conditions $f \perp \cos$ et $f \perp \sin$ s'écrivent :

$a_{-1} + a_1 = 0$ et $a_1 - a_{-1} = 0$.

Donc $a_1 = a_{-1} = -a_{-1} = 0$. La fonction f s'écrit donc

$f = \sum_{n \notin \{-1, 1\}} a_n e_n$, ce qui montre que les vecteurs (e_n) tels que $n \in \mathbb{Z}$ et $n \notin \{-1, 1\}$ forment une base hilbertienne du s.e.v. V.

3) $V^{\perp} = V[\cos, \sin]^{\perp\perp} = V[\cos, \sin]$

(car $V[\cos, \sin]$ est fermé puisqu'il est de dimension finie). Mais on vérifie immédiatement qu'on a aussi

$V^{\perp} = V[\cos, \sin] = V[e_{-1}, e_1]$ le s.e.v engendré par e_{-1} et e_1.

4) $P_{V^\perp}(\cos^2) = \langle \cos^2, e_{-1} \rangle e_{-1} + \langle \cos^2, e_1 \rangle e_1$

(thm de projection sur un s.e.v dont on connait une base hilbertienne). Or

$$\cos^2 t = \tfrac{1}{4}(e^{-it} + e^{it})^2 = \tfrac{1}{4}(e^{-2it} + 2 + e^{2it}),$$

d'où $\langle \cos^2, e_{-1}\rangle = 0$, $\langle \cos^2, e_1\rangle = 0$ et donc

$$P_{V^\perp}(\cos^2) = 0 \quad \text{(la fonction identiquement nulle).}$$

Partie B :

1) Pour $t\in[-\pi,\pi]$ fixé, on a

$$|(Af)(t)|^2 = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(u-t)\,du\right|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|^2du\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(u-t)\,du,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où

$|(Af)(t)|^2 \le 2\pi^2\|f\|^2$ (car $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(u-t)\,du = \pi$). Ainsi

$$\|Af\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(Af)(t)|^2 dt \le \frac{1}{2\pi}2\pi\cdot 2\pi^2\|f\|^2 = 2\pi^2\|f\|^2 < +\infty$$

donc $Af\in H$.

2) L'application $f\mapsto Af$ est linéaire de H dans H (linéarité de l'intégrale) et on a vu à la question 1) que

$$\forall f\in H,\quad \|Af\| \le \sqrt{2}\pi\|f\|.$$

Ceci montre que A est un opérateur continu vérifiant

$$|||A||| \le \sqrt{2}\pi.$$

3) Pour toutes fonctions f et $g\in H$, on a

$$\langle Af,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (Af)(t)\overline{g(t)}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(u-t)\,du\right)\overline{g(t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(t)}\sin(u-t)\,dt\right)du \quad \text{(Fubini)}$$

$= \langle f, A^*g\rangle$. D'où par identification

$$(A^*g)(u) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(u-t)\,dt = -\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t-u)\,dt$$
$$= -(Ag)(u).$$

D'où $A^* = -A$.

4) $$(Af)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{1}{2i}\left(e^{i(u-t)} - e^{-i(u-t)}\right)du =$$

$$\frac{1}{2i}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{iu}du\right)e^{-it} - \frac{1}{2i}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iu}du\right)e^{it}$$

$$= \frac{\pi}{i}\langle f,e_{-1}\rangle e_{-1}(t) - \frac{\pi}{i}\langle f,e_1\rangle e_1(t)$$

D'où $$Af = \frac{\pi}{i}\left(\langle f,e_{-1}\rangle e_{-1} - \langle f,e_1\rangle e_1\right)$$
$$= \frac{\pi}{i}\left(P_{V[e_{-1}]}(f) - P_{V[e_1]}(f)\right),$$

où $P_{V[e_{-1}]}$ (resp. $P_{V[e_1]}$) est l'opérateur de projection orthogonale sur la droite $V[e_{-1}]$ (resp. $V[e_1]$).

5) Si f est un vecteur propre ($\neq 0$) $Af = \lambda f$, alors :

$\langle f,e_{-1}\rangle e_{-1} - \langle f,e_1\rangle e_1 = \frac{\lambda i}{\pi}f = \frac{\lambda i}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$, ceci exige

$a_n = 0$ si $n\notin\{-1,1\}$, $a_{-1} = \frac{\lambda i}{\pi}a_{-1}$ et $-a_1 = \frac{\lambda i}{\pi}a_1$.

Si $\lambda=0$, il est nécessaire que $f=0$. Donc $\lambda=0$ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda\neq 0$, alors on a les 2 conditions

$a_{-1}\left(1-\frac{\lambda i}{\pi}\right) = 0$ (1) et $a_1\left(1+\frac{\lambda i}{\pi}\right)=0$ (2).

On a déjà noté qu'on ne peut pas avoir à la fois

$a_{-1}=0$ et $a_1=0$. D'autre part $a_{-1}\neq 0$ et $a_1\neq 0$ est également impossible car d'après (1) et (2), on aurait alors $\frac{\lambda i}{\pi}=1$ et $\frac{\lambda i}{\pi}=-1$ ce qui est absurde.

Il reste alors 2 cas:

- $a_{-1}\neq 0$ et $a_1=0$. Dans ce cas $1-\frac{\lambda i}{\pi}=0$ i.e. $\lambda=\frac{\pi}{i}$ et les vecteurs propres associés sont de la forme $f=a_{-1}e_{-1}$. Le sous espace propre associé $V_{\pi/i}$ est alors la droite engendrée par e_{-1} ; en particulier $\dim V_{\pi/i}=1$.
- $a_{-1}=0$ et $a_1\neq 0$. Dans ce cas $1+\frac{\lambda i}{\pi}=0$ i.e $\lambda=-\frac{\pi}{i}$ et les vecteurs propres associés sont de la forme $f=a_1e_1$. Le sous espace propre associé est $V_{-\pi/i}=\mathbb{C}e_1$; il est de dimension 1

<u>Conclusion</u>: L'espace $H=L^2([-\pi,\pi])$ n'est pas somme directe des sous espaces propres de l'opérateur A puisque $V_{\frac{\pi}{i}}\oplus V_{-\frac{\pi}{i}}$ est de dimension 2 et H est de dimension infinie. L'opérateur A n'est donc <u>pas diagonalisable</u>.