L3 de mathématiques 1ère session Lundi 4 Mai 2009

Corrigé de l'épreuve d'Espaces de Hilbert

Exercice I :

1) $k \geq 1$ entier fixé

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \ell^2$,

$$f(\lambda x + \mu y) = (\lambda x_k + \mu y_k) - (\lambda x_{k+1} + \mu y_{k+1})$$
$$= \lambda(x_k - x_{k+1}) + \mu(y_k - y_{k+1}) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

donc f est une forme linéaire.

De plus :

$$\forall x \in \ell^2, \ |f(x)| = |x_k - x_{k+1}| = \langle (x_k, x_{k+1}), (1,-1) \rangle$$
$$\leq \sqrt{x_k^2 + x_{k+1}^2}\,\sqrt{2} \quad (\text{Cauchy-Schwarz dans } \mathbb{R}^2)$$
$$\leq \sqrt{2}\,\|x\|.$$

Ainsi :

$\sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = |||f||| \leq \sqrt{2}$, ce qui prouve que f est continue. Mais si on choisit $x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(k)} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(k+1)}$, on a $\|x\| = 1$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, donc $|||f||| \geq \sqrt{2}$; d'où $|||f||| = \sqrt{2}$.

Autre solution :

$\forall x \in \ell^2, \ f(x) = \langle x, v \rangle$,

où $v = e^{(k)} - e^{(k+1)}$. Le théorème de Riesz-Fisher nous assure alors que f est une forme linéaire continue et que $|||f||| = \|v\| = \sqrt{2}$.

2) Posons $V_k = \{x \in \ell^2 ; x_k = x_{k+1}\}$ (k entier fixé).

On a $V_k = \operatorname{Ker} f_k$,

où $f_k : x \mapsto x_k - x_{k+1}$ est une forme linéaire continue (quest. 1) donc V_k est un s.e.v. fermé.

Mais

$V = \bigcap_{k=1}^{N-1} V_k$ est un s.e.v (comme intersection de s.e.v) et il est fermé (comme intersection de fermés). CQFD.

b) $x \in V \iff x_1 = x_2, x_2 = x_3, \dots, x_{N-1} = x_N$

$$\iff x = (x_1, x_1, \dots, x_1, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)$$
$$= x_1(e^{(1)} + \dots + e^{(N)}) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} x_k e^{(k)}$$
$$\overset{(*)}{=} x_1 \sqrt{N}\, v + \sum_{k \geq N+1} x_k e^{(k)},$$

où $v = \frac{1}{\sqrt{N}}(e^{(1)} + \dots + e^{(N)}) \in \ell^2$ et $\|v\| = 1$.

les vecteurs $v, e^{(N+1)}, e^{(N+2)}, \dots$ forment une famille orthonormale et <u>totale</u> dans V puisque si $x\in V$ est tel que $x\perp v$ et $x\perp e^{(k)}, k\geq N+1$, on obtient $x=0$ d'après l'écriture (*).

Donc $\{v, e^{(N+k)}, k\geq 1\}$ est une base hilbertienne de V.

Soit $x\in \ell^2$. Le théorème de projection sur un s.e.v fermé implique :

$$P_V(x)=\langle x,v\rangle v+\sum_{k\geq N+1}\langle x,e^{(k)}\rangle e^{(k)}$$

$$=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)(e^{(1)}+\dots+e^{(N)})+\sum_{k\geq N+1}x_k\,e^{(k)}$$

$$=(\underbrace{m,m,\dots,m}_{N\text{ fois}},x_{N+1},x_{N+2},\dots,x_{N+p},\dots)$$

où $m=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$.

c) $x\in V^{\perp}\iff x\perp v$ et $x\perp e^{(k)}\ \forall k\geq N+1$

$\iff \sum_{i=1}^{N}x_i=0$ et $x_k=0\ \forall k\geq N+1$

$\iff x=(x_1,\dots,x_N,0,0,\dots)$ et $x_1+x_2+\dots+x_N=0$.

$\iff x\in V[e^{(1)},\dots,e^{(N)}]$ et $x\perp v$

$\iff x\in$ l'orthogonal de v dans $V[e^{(1)},\dots,e^{(N)}]$

Donc $\dim V^{\perp}=N-1$.

<u>Exercice II</u> :

a) $f_1\notin L^2([-\pi,\pi])$ car $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|x|}dx=+\infty$ donc f_1 n'a pas de série de Fourier au sens du cours.

b) $f_2\in L^2([-\pi,\pi])$ car $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|x|^{2/3}}dx<+\infty$. Donc la série de Fourier de f_2 converge vers f_2 au sens L^2 d'après un théorème du cours (complétude du système trigonométrique).

La question de la convergence simple ou uniforme ne se pose pas puisque la fonction n'est pas bornée (en $x=0$) (en cours nous n'avons étudié cette question que dans le cas où les fonctions sont bornées). Notons seulement que la convergence n'est pas uniforme sur $[-\pi,\pi]$ car les sommes de Fourier étant des fonctions continues, la fonction limite devrait être continue en cas de convergence uniforme, ce qui n'est pas le cas.

c) Le problème est sans objet pour les fonctions f_3 et f_4 qui ne sont pas définies sur $[-\pi,0[$.

2) V est par définition l'orthogonal de l'ensemble $B_1=\{e^{(2k+1)};k\in\mathbb{Z}\}$ donc $V=\overline{V[B_1]}^{\perp}$ où

$V[B_1]$ est le s.e.v. engendré par B_1.

Mais $L^2([-\pi,\pi]) = \overline{V[B_1]} \oplus \overline{V[B_2]}$

où $B_2 = \{e^{(2k)}; k \in \mathbb{Z}\}$ car $B_1 \cup B_2$ est une base hilbertienne de $L^2([-\pi,\pi])$. Ceci montre que

$V = \overline{V[B_2]}$ et B_2 est une base hilbertienne de V.

3) D'après le théorème de projection, la meilleure approximation de f au sens L^2 par une fonction de V est $P_V(f)$ la projection orthogonale de f sur V, c'est à dire

$$P_V(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, e^{(2k)} \rangle e^{(2k)}.$$

$f = f_1 + f_2$ où $f_1(x) = \sin(2x) = \dfrac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}$

et $f_2(x) = \sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}\right)$

Mais $f_1 \in V$ et $f_2 \in V^\perp$ et on a donc

$$P_V(f) = P_V(f_1) + P_V(f_2) = f_1.$$

Exercice III :

1) Soit x et $y \in H$. Ecrivons $x = x_1 + x_2$ et

$y = y_1 + y_2$, où $x_1 = Px \;(= P_V(x))$, $x_2 = P_{V^\perp}(x)$, $y_1 = Py$ et $y_2 = P_{V^\perp}(y)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle Px, y \rangle &= \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle \\
&= \langle x_1, y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2 \rangle}_{=0} \\
&= \langle x_1, y_1 \rangle \\
&= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle \quad (\text{car } \langle x_2, y_1 \rangle = 0) \\
&= \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x, y_1 \rangle \\
&= \langle x, Py \rangle
\end{aligned}$$

Mais par définition de l'adjoint, on a aussi

$\langle Px, y \rangle = \langle x, P^* y \rangle$.

Donc $\langle x, Py \rangle = \langle x, P^* y \rangle$ et ceci étant vrai pour tout $x \in H$, on en déduit que $Py = P^* y \;(\forall y \in H)$

i.e. $P = P^*$.

2) a) Soient $i \neq j$, $x \in V_i$ et $y \in V_j$.

Par définition, il existe $\tilde{x} \in H$ et $\tilde{y} \in H$ tels que

$x = P_i(\tilde{x})$ et $y = P_j(\tilde{y})$.

Alors

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle P_i(\tilde{x}), P_j(\tilde{y}) \rangle \\
&= \langle \tilde{x}, P_i^* P_j(\tilde{y}) \rangle \quad (\text{déf}^{\text{n}} \text{ de l'adjoint})
\end{aligned}$$

$$= \langle \tilde{x}, P_i P_j \tilde{y} \rangle = \langle \tilde{x}, 0 \rangle \quad (P_i P_j = 0).$$

$$= 0$$

donc $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont orthogonaux. D'où $V_i \perp V_j$.

b) Pour $n = 2$, $W_2 = V_1 \oplus V_2$ (somme directe orthogonale)

Par la propriété caractéristique de la projection orthogonale $P_{W_2}(x)$ est l'<u>unique</u> vecteur de W_2 tel que

$$x - P_{W_2}(x) \perp W_2 \quad (*)$$

Soit $y \in W_2$; décomposons $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in V_1$ et $y_2 \in V_2$.

Calculons

$$\langle x - P_{V_1}(x) - P_{V_2}(x), y \rangle =$$

$$\langle x - P_{V_1}(x) - P_{V_2}(x), y_1 + y_2 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle x - P_{V_1}(x), y_1 \rangle}_{\substack{=0 \\ (\text{Prop. caract. de } P_{V_1})}} + \langle x - P_{V_1}(x), y_2 \rangle - \underbrace{\langle P_{V_2}(x), y_1 \rangle}_{\substack{=0 \\ (y_1 \perp V_2)}} - \langle P_{V_2}(x), y_2 \rangle$$

$$= \langle x - P_{V_1}(x) - P_{V_2}(x), y_2 \rangle =$$

$$\underbrace{\langle x - P_{V_2}(x), y_2 \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle P_{V_1}(x), y_2 \rangle}_{=0}$$

$$= 0$$

Le vecteur $P_{V_1}(x) + P_{V_2}(x)$ vérifie aussi $(*)$. Par unicité

$$P_{W_2}(x) = P_{V_1}(x) + P_{V_2}(x).$$

Pour $n > 2$, on fait une démonstration par récurrence

Supposons la propriété démontrée jusqu'à l'entier n

Alors $W_{n+1} = W_n \oplus V_{n+1}$ (somme directe orthogonale)

Le raisonnement fait dans le cas $n = 2$, montre que

$$P_{W_{n+1}}(x) = P_{W_n}(x) + P_{n+1}(x).$$

L'hypothèse de récurrence donne $P_{W_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$

Donc $P_{W_{n+1}}(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) + P_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} P_i(x)$

et l'hypothèse de récurrence est vérifiée CQFD.

c) Comme les vecteurs $P_i(x)$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne :

$$\| P_{W_n}(x) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| P_i(x) \|^2$$

Mais $\| P_{W_n}(x) \|^2 \leq \|x\|^2$ (P_{W_n} est une contraction)

Comme ses sommes partielles sont bornées (par $\|x\|^2$)

la série à <u>termes positifs</u> $\sum_{i=1}^{+\infty} \| P_i(x) \|^2$ est donc <u>convergente</u> et sa somme est majorée par $\|x\|^2$.

d) Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(x)$. On a si $n < m$

$$\| S_m - S_n \|^2 = \| \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i P_i(x) \|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\lambda_i|^2 \| P_i(x) \|^2 \leq$$

$$M \sum_{i=m+1}^{n} \| P_i(x) \|^2 \quad \text{où } M = \sup_{i \geq 1} |\lambda_i|^2 < +\infty$$

$\longrightarrow 0$ si $n, m \to +\infty$ (reste de la série CVte $\sum_{i=1}^{\infty} \| P_i(x) \|^2$)

Ceci montre que $(S_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans H. Mais H est complet donc $\lim_{n \to \infty} S_n \in H$ existe i.e. $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i P_i(x)$ converge dans H et

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i P_i(x) = T(x)$$

e) T est linéaire (cela résulte trivialement de la linéarité des P_i)

$$\| T(x) \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \| P_i(x) \|^2 \quad \text{(Pythagore + passage à la limite)}$$

$$\leq M \sum_{i=1}^{\infty} \| P_i(x) \|^2$$

$$\leq M \| x \|^2$$

D'où $|||T|||^2 \leq M$ i.e. $|||T||| \leq \sqrt{\sup_{i \geq 1} |\lambda_i|^2} = \sup_{i \geq 1} |\lambda_i|$

f) Si les λ_k <u>sont réels</u>, T est autoadjoint car

$$\langle Tx, y \rangle = \langle \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(x), y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(x), y \rangle$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle P_i(x), y \rangle \underset{\text{car } \lambda_i \in \mathbb{R}.}{=} \lim \sum_{i=1}^{n} \langle x, \lambda_i P_i(y) \rangle = \langle x, Ty \rangle$$