Espaces de Hilbert session 2 mardi 15 juin 2010.

Ex I Partie A : 1) $x \in \ell^2$ donc la suite x est bornée : il existe une constante $M>0$ telle que : $\forall n \geq 1$, $|x_n| \leq M$. Alors pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{4}|x_2| + \frac{1}{16}|x_4| + \dots + \frac{1}{4^n}|x_{2n}| \leq M\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right)$$
$$\leq M.\frac{1/4}{1-1/4} = \frac{M}{3} < +\infty .$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}|x_{2n}|$ est convergente ce qui montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} x_{2n}$ est absolument (ou normalement) convergente. Comme $\mathbb{C}$ est complet, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} x_{2n}$ est convergente.

2) ϕ est linéaire (linéarité de la somme des séries convergentes)

De plus par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x \in \ell^2, \ |\phi(x)| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{2n}|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq \left(\frac{1/16}{1-1/16}\right)^{1/2}\|x\|_2 = \sqrt{\frac{1}{15}}\|x\|_2 .$$

Cette inégalité montre que ϕ est continue et $|||\phi||| \leq \sqrt{\frac{1}{15}}$.

Pour calculer $|||\phi|||$, on peut remarquer que

$$\forall x \in \ell^2, \quad \phi(x) = \langle x, a\rangle,$$

où $a = (0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, 0, \dots 0, \frac{1}{4^n}, 0, \frac{1}{4^{n+1}}, 0, \dots) \in \ell^2$. Le théorème

↳ place no $2n$

de Riesz-Fréchet permet alors de dire que :

$$\boxed{|||\phi||| = \|a\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4^n}\right)^2\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{15}} .}$$

3) a) $V = D^\perp$ où D est la droite engendrée par le vecteur a

donc V est un sous espace vectoriel fermé de ℓ^2 (comme tout orthogonal d'une partie quelconque de ℓ^2 d'après un théorème du cours).

b) $V^\perp = D^{\perp\perp} = D$ car D est un sous espace fermé de ℓ^2 (puisqu'il est de dimension 1 et que tout sous espace de dimension finie est fermé). Une base hilbertienne de D est $\frac{a}{\|a\|}$. D'après le thm de projection, on a donc

$$P_{V^\perp}(x) = \left\langle x, \frac{a}{\|a\|}\right\rangle \frac{a}{\|a\|} = 15\langle x, a\rangle a$$
$$= 15\,\phi(x)\,a$$
$$= 15\,\phi(x)\left(0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{16}, \dots, 0, \frac{1}{4^n}, 0, \dots\right) .$$

↳ place no $2n$

On a alors $\|P_{V^\perp}(x)\| = 15|\phi(x)|\|a\|_2 = \sqrt{15}\,|\phi(x)|$.

c) Comme $H = V \oplus V^\perp$, on a $x = P_V(x) + P_{V^\perp}(x)$. D'où

$$\boxed{P_V(x) = x - P_{V^\perp}(x) = x - 15\,\phi(x)\,a .}$$

Partie B : 1) $Ax = y$, où $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 + x_3, \dots$, $y_n = x_{2n-2} + x_{2n-1}$. Ainsi pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2 = |x_1|^2 + |x_2+x_3|^2 + |x_4+x_5|^2 + \dots + |x_{2n-2}+x_{2n-1}|^2$$
$$\leq |x_1|^2 + 2(|x_2|^2+|x_3|^2) + \dots + 2(|x_{2n-2}|^2 + |x_{2n-1}|^2)$$

(on applique Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^2$ pour majorer $|x_{2n-2}+x_{2n-1}|^2$)

D'où $\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2 \leq 2\sum_{k=1}^{2n-1}|x_k|^2 \leq 2\|x\|_2^2 < +\infty$ ce qui montre que $Ax \in \ell^2$ et que $\|Ax\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_2$.

2) pour $x, x' \in \ell^2$, λ et $\mu \in \mathbb{C}$, la $n$ième coordonnée de $A(\lambda x + \mu x')$ est égale à :

$$A(\lambda x+\mu x')_n = (\lambda x+\mu x')_{2n-2}+(\lambda x+\mu x')_{2n-1}$$
$$= \lambda x_{2n-2}+\mu x'_{2n-2}+\lambda x_{2n-1}+\mu x'_{2n-1}$$
$$= \lambda(x_{2n-2}+x_{2n-1})+\mu(x'_{2n-2}+x'_{2n-1})$$
$$= \lambda(Ax)_n+\mu(Ax')_n .$$

Ceci prouve que $A(\lambda x+\mu x') = \lambda Ax+\mu Ax'$ i.e. $A:\ell^2\to\ell^2$ est linéaire. De plus la question 1) montre que : $\forall x\in\ell^2$, $\|Ax\|_2\le\sqrt{2}\|x\|_2$. Cette inégalité prouve que A est un opérateur continu et $|||A|||\le\sqrt{2}$.

<u>Calcul de $|||A|||$</u> : on sait déjà que $|||A|||\le\sqrt{2}$. Considérons le vecteur $x=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,\dots,0,\dots)$. On a $\|x\|_2=1$ et

$Ax=(0,\sqrt{2},0,\dots,0,\dots)$ d'où $\|Ax\|_2^2=2$ ie $\|Ax\|=\sqrt{2}$.
On a donc

$$|||A||| = \sup_{\|x\|_2\le 1}\|Ax\|_2 \ge \sqrt{2}.$$ Les 2 inégalités prouvent que $\underline{|||A|||=\sqrt{2}}$.

3) a) Soit $z=(z_1,z_2,\dots,z_n,\dots)\in\ell^2$ un vecteur arbitraire.
A est <u>surjectif</u> si <u>l'équation $Ax=z$ a au moins une solution $x\in\ell^2$</u> ; $Ax=z$ équivaut à :

$$x_1=z_1,\ x_2+x_3=z_2,\ x_4+x_5=z_3,\dots,\ x_{2n-2}+x_{2n-1}=z_n,\dots$$

On peut prendre par exemple :

$$x_1=z_1,\ x_2=x_3=\frac{z_2}{2},\ x_4=x_5=\frac{z_3}{2},\dots,\ x_{2n-2}=x_{2n-1}=\frac{z_n}{2},\dots$$

le vecteur $x=(x_1,x_2,x_3,\dots,x_k,\dots)$ <u>est bien dans ℓ^2 car</u> :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|^2 = |z_1|^2+\frac{|z_2|^2}{4}+\frac{|z_2|^2}{4}+\frac{|z_3|^2}{4}+\frac{|z_3|^2}{4}+\dots+\frac{|z_n|^2}{4}+\frac{|z_n|^2}{4}+\dots$$
$$= |z_1|^2+\frac{1}{2}|z_2|^2+\frac{1}{2}|z_3|^2+\dots+\frac{1}{2}|z_n|^2+\dots\le\|z\|_2^2<+\infty .$$

Donc A <u>est surjectif</u>.

b) $\operatorname{Ker}A=\{x\in\ell^2;\ Ax=(0,0,\dots,0,\dots)\}$. D'où

$$x\in\operatorname{Ker}A \iff x_1=0,\ x_2+x_3=0,\ x_4+x_5=0,\dots,\ x_{2n-2}+x_{2n-1}=0,\dots$$
$$\iff x_1=0,\ x_3=-x_2,\ x_5=-x_4,\dots,\ x_{2n-2}=-x_{2n-1},\dots$$

Les coordonnées $x_2,x_4,x_6,\dots,x_{2n},\dots$ <u>sont libres</u> et on peut écrire (à condition toutefois que $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{2n}|^2<+\infty$) :

$$x\in\operatorname{Ker}A\iff x=(0,x_2,-x_2,x_4,-x_4,x_6,-x_6,\dots,x_{2n},-x_{2n},\dots)$$
$$= x_2e^{(2)}-x_2e^{(3)}+x_4e^{(4)}-x_4e^{(5)}+x_6e^{(6)}-x_6e^{(7)}+\dots$$
$$+x_{2n}e^{(2n)}-x_{2n}e^{(2n+1)}+\dots$$
$$= x_2(e^{(2)}-e^{(3)})+x_4(e^{(4)}-e^{(5)})+x_6(e^{(6)}-e^{(7)})+\dots$$
$$+x_{2n}(e^{(2n)}-e^{(2n+1)})+\dots \quad (*)$$

Cette écriture fait ressortir les vecteurs

$$v^{(1)}=e^{(2)}-e^{(3)};\ v^{(2)}=e^{(4)}-e^{(5)};\dots;\ v^{(n)}=e^{(2n)}-e^{(2n+1)};\dots$$

Les vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux comme on le vérifie facilement donc les vecteurs

$$\frac{v^{(1)}}{\sqrt{2}},\frac{v^{(2)}}{\sqrt{2}},\dots,\frac{v^{(n)}}{\sqrt{2}},\dots$$

forment une famille orthonormale de vecteurs de ℓ^2 et

$$x\in\operatorname{Ker}A\iff x=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\frac{v^{(k)}}{\sqrt{2}}$$ (série convergente dans ℓ^2). <u>Les vecteurs $\left(\frac{v^{(n)}}{\sqrt{2}}\right)_{n\ge1}$ forment donc une base hilbertienne de $\operatorname{Ker}A$</u>.

<u>Ex II</u> 1) voir le cours.

2) a) Pour tout $t\in[-\pi,\pi]$ fixé, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(Af)(t)|^2\le\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t-s)|^2ds\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(s)|^2ds\right)=$
$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(s)|^2ds\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(s)|^2ds\right)$ (car φ

donc $|\varphi|^2$ est 2π-périodique ce qui implique que $\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(t-s)|^2ds = \int_{t-\pi}^{t+\pi}|\varphi(u)|^2du = \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(u)|^2du$). Ainsi :

$$|(Af)(t)|^2 \leq 4\pi^2\|\varphi\|^2\|f\|^2.$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(Af)(t)|^2dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}4\pi^2\|\varphi\|^2\|f\|^2dt = 4\pi^2\|\varphi\|^2\|f\|^2,$$

c'est à dire $\|Af\|^2 \leq 4\pi^2\|\varphi\|^2\|f\|^2 \ (<+\infty) (*)$

L'opérateur A étant linéaire (linéarité de l'intégrale) l'iné-galité $(*)$ montre que A est continu et

$$|||A||| \leq 2\pi\|\varphi\|.$$

b) Pour tout s fixé ($\in[-\pi,\pi]$) la fonction $t\mapsto\varphi(t-s)f(s)$ est continue et on a la domination (indépendante de t) :

$$|\varphi(t-s)f(s)| \leq M f(s),$$

la fonction dominante $s\mapsto Mf(s)$ étant intégrable sur $[-\pi,\pi]$ (puisque $f\in L^2([-\pi,\pi])$ donc aussi à $L^1([-\pi,\pi])$). Le théorème de dérivation sous le signe intégrale montre alors que la fonction $t\mapsto(Af)(t)$ est continue.

3) a) $$(Ae_n)(t) = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t-s)e^{ins}ds = \int_{t-\pi}^{t+\pi}\varphi(u)e^{in(t-u)}du$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)e^{int}e^{-inu}du = e^{int}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)e^{-inu}du$$

$$= 2\pi e^{int}\hat{\varphi}(n) = \lambda_n e^{int}$$

où $\hat{\varphi}(n) = \langle\varphi,e_n\rangle$ est le $n$ième coefficient de Fourier de φ et $\lambda_n := 2\pi\hat{\varphi}(n)$. Ainsi on a montré que $Ae_n = \lambda_n e_n$

Donc e_n est fonction propre de A de valeur propre $\lambda_n = 2\pi\hat{\varphi}(n)$.

b) Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H, on a

$$\forall f\in H,\ f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f,e_n\rangle e_n \text{ (série convergente dans } H)$$

donc $f = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=-n}^{m}\langle f,e_k\rangle e_k$ (au sens de la convergence pour la norme de H). Par linéarité de A, on a :

$$A\sum_{k=-n}^{m}\langle f,e_k\rangle e_k = \sum_{k=-n}^{m}\langle f,e_k\rangle Ae_k = \sum_{k=-n}^{m}\lambda_k\langle f,e_k\rangle e_k.$$

En faisant $n\to+\infty$ et grâce à la continuité de A, on obtient :

$$Af = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=-n}^{m}\lambda_k\langle f,e_k\rangle e_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n\langle f,e_n\rangle e_n,$$

la convergence ayant lieu au sens de L^2 (i.e. pour la norme de H).

4) On a $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n\langle f,e_n\rangle e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}}2\pi\hat{\varphi}(n)\langle f,e_n\rangle e_n$ et on sait d'après 1) que $|\hat{\varphi}(n)| \leq \frac{C}{n^2}$ où C est une constante ; mais on sait que $(\langle f,e_n\rangle)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite bornée : $\exists C'>0$ tq $\forall n\in\mathbb{Z}$ $|\langle f,e_n\rangle| \leq C'$. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}2\pi\hat{\varphi}(n)\langle f,e_n\rangle e_n$ est donc normalement convergente sur $[-\pi,\pi]$ donc uniformément convergente.

5) a) $Af = 0$ implique $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\lambda_n\langle f,e_n\rangle = 0$. Si pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\lambda_n\neq0$ alors : $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\langle f,e_n\rangle = 0$. Donc $f = 0$

Une C.S. pour que A soit injectif est donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{Z},\ \lambda_n\neq0}$

b) $\forall f,g\in H$: $\langle Af,g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n\langle f,e_n\rangle\overline{\langle g,e_n\rangle}$ et $\langle f,Ag\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f,e_n\rangle\overline{\lambda_n}\,\overline{\langle g,e_n\rangle}$ d'après Bessel-Parseval.

Une C.S. pour que A soit auto adjoint est donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{Z},\ \lambda_n\in\mathbb{R}}$.