Espaces de Hilbert — Corrigé détaillé de l'épreuve de Juin 2009 (2ième session)

1) $\forall x, y \in \ell^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$f(\lambda x+\mu y) = (\lambda x_n+\mu y_n)+(\lambda x_{n+1}+\mu y_{n+1})+a(\lambda x_{n+2}+\mu y_{n+2})$$
$$= \lambda(x_n+x_{n+1}+a x_{n+2})+\mu(y_n+y_{n+1}+a y_{n+2})$$
$$= \lambda f(x)+\mu f(y).$$

Donc f est une forme linéaire sur ℓ^2. De plus :

$$\forall x \in \ell^2, \ |f(x)| = |x_n+x_{n+1}+a x_{n+2}|$$
$$\leq \sqrt{|x_n|^2+|x_{n+1}|^2+|x_{n+2}|^2}\sqrt{2+|a|^2}$$

(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^3$). D'où

$$|f(x)| \leq \|x\| \sqrt{2+|a|^2},$$

ce qui prouve que f est continue et $|||f||| \leq \sqrt{2+|a|^2}$ $(*)$

Mais si on prend x tel que $x_n = \frac{1}{\sqrt{2+|a|^2}}$, $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2+|a|^2}}$ et $x_{n+2} = \frac{a}{\sqrt{2+|a|^2}}$ et $x_k = 0$ si $k \notin \{n, n+1, n+2\}$,

on a $\|x\| = 1$ et $|f(x)| = \sqrt{2+|a|^2}$ donc $|||f||| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| \geq \sqrt{2+|a|^2}$. Compte tenu de $(*)$, on obtient

$$|||f||| = \sqrt{2+|a|^2}.$$

2) a) V est le noyau de la forme linéaire f :

$f(x) = x_1+x_2-x_3$, donc V est un sous-espace vectoriel de ℓ^2. Mais f est continue d'après 1 donc $V = f^{-1}(\{0\})$ est fermé.

b) Pour $x \in V$, x s'écrit :

$$x = x_1 e^{(1)} + x_2 e^{(2)} + (x_1+x_2) e^{(3)} + \sum_{k=4}^{+\infty} x_k e^{(k)}$$
$$= x_1(e^{(1)}+e^{(3)}) + x_2(e^{(2)}+e^{(3)}) + \sum_{k=4}^{+\infty} x_k e^{(k)}$$
$$= x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \sum_{k\geq 4} x_k e^{(k)},$$

où $e^{(1)}+e^{(3)} = a^{(1)}$ et $e^{(2)}+e^{(3)} = a^{(2)}$. Ceci montre que

$$V = \overline{V[a^{(1)}, a^{(2)}, (e^{(k)})_{k\geq 4}]}$$

(le sous espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs $a^{(1)}, a^{(2)}, e^{(4)}, e^{(5)}, \dots, e^{(i+4)}, \dots$). Posons

$$v^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} = \frac{e^{(1)}+e^{(3)}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \tilde{v}^{(2)} = a^{(2)} - P_{V[v^{(1)}]}(a^{(2)})$$

Alors $v^{(1)}$ et $\tilde{v}^{(2)}$ sont orthogonaux et orthogonaux aux vecteurs $e^{(k)}$, $k \geq 4$. Il suffit de prendre

$$v^{(2)} = \frac{\tilde{v}^{(2)}}{\|\tilde{v}^{(2)}\|}$$ pour obtenir une base hilbertienne :

$v^{(1)}, v^{(2)}, e^{(n)}, n\geq 4$ du sous-espace vectoriel V. Calcu-

- Calcul de $\tilde{v}_2$:

$P_{V[v^{(1)}]}(a^{(2)}) = \langle a^{(2)}, v^{(1)} \rangle v^{(1)}$ (par la formule donnant le projeté orthogonal sur un s.e.v dont on connait une base hilbertienne). D'où

$$P_{V[v^{(1)}]}(a^{(2)}) = \frac{1}{\|a^{(1)}\|^2} \langle e^{(2)}+e^{(3)}, e^{(1)}+e^{(3)} \rangle (e^{(1)}+e^{(3)})$$
$$= \frac{1}{2}(e^{(1)}+e^{(3)}).$$

D'où $\tilde{v}^{(2)} = e^{(2)}+e^{(3)} - \frac{1}{2}e^{(1)} - \frac{1}{2}e^{(3)} =$
$$-\frac{1}{2}e^{(1)} + e^{(2)} + \frac{1}{2}e^{(3)},$$

ce qui implique :
$$v^{(2)} = \frac{\tilde{v}^{(2)}}{\|\tilde{v}^{(2)}\|} = \frac{\tilde{v}^{(2)}}{\sqrt{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}e^{(1)} + e^{(2)} + \frac{1}{2}e^{(3)}\right).$$

c) Soit $x \in \ell^2$. Par la formule de la projection, on a
$$P_V(x) = \langle x, v^{(1)} \rangle v^{(1)} + \langle x, v^{(2)} \rangle v^{(2)} + \sum_{k=4}^{+\infty} \langle x, e^{(k)} \rangle e^{(k)}.$$

On calcule alors :
$$\langle x, v^{(1)} \rangle v^{(1)} = \frac{1}{2}(x_1+x_3)(e^{(1)}+e^{(3)})$$
$$\langle x, v^{(2)} \rangle v^{(2)} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)\left(-\frac{1}{2}e^{(1)} + e^{(2)} + \frac{1}{2}e^{(3)}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)\left(-\frac{1}{2}e^{(1)} + e^{(2)} + \frac{1}{2}e^{(3)}\right)$$
$$\langle x, e^{(k)} \rangle e^{(k)} = x_k e^{(k)}.$$

Finalement :
$$P_V(x) = \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)e^{(1)} + \left(-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)e^{(2)} +$$
$$+ \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)e^{(3)} + \sum_{k=4}^{+\infty} x_k e^{(k)}.$$

d) $x \in V^\perp \iff x \perp a^{(1)}$, $x \perp a^{(2)}$ et $x \perp e^{(k)}$ pour tout $k \geq 4$. Soit pour les coordonnées de x :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_k = 0 \quad \forall k \geq 4. \end{cases}$$

D'où $x_1 = x_2$, $x_3 = -x_1$ et $x_k = 0$ ($\forall k \geq 4$). Seule la coordonnée x_1 est libre et on a donc l'expression explicite :

$x \in V^\perp \iff x = (x_1, x_1, -x_1, 0, \dots, 0, \dots)$ $(x_1 \in \mathbb{C})$.

D'où $V^\perp = \mathbb{C}\cdot(e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)})$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)}$.

Ainsi $\dim V^\perp = 1$.

<u>Autre solution plus rapide</u> : par définition,

$x \in V \iff x \perp e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)}$. Donc

$V = \left(V[e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)}]\right)^\perp$ est l'orthogonal du s.e.v. <u>fermé</u> $V[e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)}]$ engendré par le vecteur $e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)}$.

(*) D'où $V^\perp = \left(V[e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)}]^\perp\right)^\perp \stackrel{(*)}{=} V[e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)}] =$
$\mathbb{C}\cdot(e^{(1)}+e^{(2)}-e^{(3)})$; ce qui montre que $\dim V^\perp = 1$.

<u>Exercice 2 :</u>

1) a) $\forall x \in H$, $k\|x\|^2 \leq \langle T(x), x \rangle \leq \|T(x)\| \|x\|$ par Cauchy-Schwarz

(*) car le s.e.v. <u>est fermé</u> car de dimension un.

si $x \neq 0$, on peut diviser les membres de l'inégalité
par $\|x\|$ et on obtient $k\|x\| \leq \|T(x)\|$. Si $x=0$ cette inégalité est encore vérifiée donc elle est vraie pour tout $x \in H$.

b) Il est clair que $T(H)$ est un sous-espace vectoriel de H. Montrons qu'il est fermé :

Soit $(y_n) \subset T(H)$ une suite convergente vers $y \in H$.

Par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in H, \; y_n = T(x_n).$$

D'après a), on a

$$k\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\| = \|y_n - y_m\|$$

pour tous $n, m \in \mathbb{N}$. Cette inégalité montre que (x_n) est une suite de Cauchy car (y_n) est de Cauchy (puisqu'elle converge).

Comme H est complet, il existe $x \in H$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dans H. Par continuité de l'opérateur T ceci implique

$$\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = T(x).$$

Mais $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$. Donc $T(x) = y$ par unicité

de la limite. Il en résulte que $y \in T(H)$ et donc $T(H)$ est fermé.

c) $x \in T(H)^\perp \iff \forall z \in H, \; \langle x, T(z)\rangle = 0$.

En particulier x doit être tel que $\langle x, T(x)\rangle = 0$.

D'après (C) ceci implique $\|x\| = 0$ donc $x = 0$

Ainsi : $T(H)^\perp = \{0\}$ et de l'égalité

$H = T(H) \oplus T(H)^\perp$ (vraie car $T(H)$ est un s.e.v. fermé), on déduit :

$$H = T(H).$$

Ainsi : T est surjectif mais T est injectif d'après la condition (C) donc T est bijectif,

et T^{-1} existe.

d) en appliquant la condition (C) avec $T^{-1}(x)$ au lieu de x, on déduit aussitôt :

$$\|T^{-1}(x)\| \leq \frac{1}{k}\|x\|.$$

2) a) la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k e^{(k)}$ $(n \in \mathbb{N})$

est de Cauchy dans H car si $n < m$, on a

$$\|S_n - S_m\|^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k x_k e^{(k)}\Big\|^2$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} |\lambda_k|^2 |x_k|^2 \underset{(*)}{\le} M \sum_{k=n+1}^{m} |x_k|^2 \longrightarrow 0 \text{ si } n,m \to +\infty$$

↳ Pythagore (reste de la série convergente $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2$)

Comme H est complet $\lim_{n\to\infty} S_n = T(x) \in H$ existe.

On écrira alors $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n e^{(n)}$

(<u>Remarque</u> : l'inégalité (*) est obtenue avec la constante $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k|^2 = \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k|\right)^2 < +\infty$).

b) La linéarité de T est facile à vérifier. De plus : $\forall x \in \ell^2$, $\|T(x)\|^2 \underset{(**)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |x_n|^2 \le M\|x\|^2$.

D'où T est continue et $|||T||| \le \sqrt{M} = \sup_{n\ge 0} |\lambda_n| < +\infty$.

(<u>Remarque</u> : (**) est obtenu par application de Bessel-Parseval).

c) $\forall x, y \in H$, on a

$$\langle T(x), y\rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n e^{(n)}, \sum_{m=1}^{+\infty} y_m e^{(m)} \Big\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{\overline{\lambda_n} y_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{\lambda_n y_n} \quad (\lambda_n \in \mathbb{R})$$

$= \langle x, T(y)\rangle$ (toutes ces égalités d'après Bessel Parseval)

Donc $T^* = T$ i.e. T est autoadjoint.

d) Par la formule donnant T, on voit que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T(e^{(n)}) = \lambda_n e^{(n)}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, λ_n est valeur propre de T (associée au vecteur propre $e^{(n)}$). Réciproquement soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de T de vecteur propre associé $x\ (\neq 0)$. On a $T(x) = \lambda x$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n e^{(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n e^{(n)},$$

ce qui implique $\lambda_n x_n \overset{(*)}{=} \lambda x_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) par l'unicité de l'écriture d'un vecteur sur la base hilbertienne $(e^{(n)})$.

De l'égalité (*) on déduit aussitôt que $\lambda = \lambda_{n_0}$ pour tout $n_0 \ge 1$ tel que $x_{n_0} \neq 0$. <u>Toute valeur propre de T est donc l'un des nombres λ_n</u>.

e) $\forall x \in H$, $\langle T(x), x\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |x_n|^2$ (Bessel-Parseval)

$$\ge k \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = k\|x\|^2.$$

Donc T vérifie la condition (C) (car $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ clairement).

f) Si T vérifie (C) alors toute valeur propre de T est forcément réelle car $\langle T(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, on a

$\langle T(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \ge k\|x\|^2 \Longrightarrow \lambda \ge k$. Donc toutes les valeurs propres vérifient la condition de la question e).