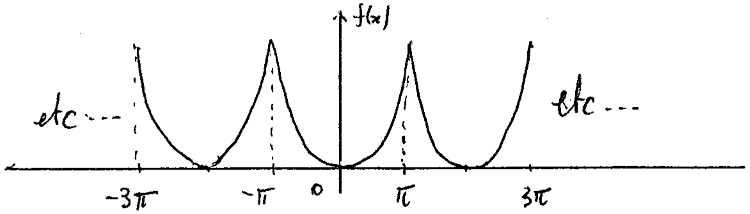
Solution de l'épreuve d'Espaces de Hilbert 2e session du 16/06/2011

Exercice 1 :



1) a) $\forall n \geq 1$, $b_n = 0$ car la fonction f est paire

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

si $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$ (après deux intégrations par parties). D'où

$$S(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

b) $$S(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

2)a) la série $S(f)(x)$ est normalement convergente car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right| = \frac{4}{n^2}$$

et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}$ est convergente (série de Riemann $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 2 > 1$). La convergence normale (sur $\mathbb{R}$) implique la convergence uniforme donc la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) D'après un théorème du cours si $S(f)$ converge uniformément alors f est somme de sa série de Fourier en tout point $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(f)(x) = x$$

c) En $x = \pi$, on a $\cos(n\pi) = (-1)^n$ donc

$$f(\pi) = \pi^2 = S(f)(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2}.$$ D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}\ \left(= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right).$$

3) La fonction f et la fonction sinus sont orthogonales (car f est paire) il en résulte que $\|g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|\sin\|_2^2$ (Théorème de Pythagore)

D'après Bessel-Parseval on a :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$ (car les exponentielles complexes $e_n : x \mapsto e^{inx}$ forment une base hilbertienne de $L^2([-\pi,\pi])$ d'après un théorème du cours). Ainsi d'après 1) b), on a :

$$\|f\|_2^2 = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{4}{n^2} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^4}{9} + 8\cdot\frac{\pi^2}{6} =$$
$$\frac{\pi^2}{9}(\pi^2+12)$$

Finalement : $\|g\|_2^2 = \frac{\pi^2}{9}(\pi^2+12) + \|\sin\|_2^2 = \frac{\pi^2}{9}(\pi^2+12) + \frac{1}{2}$

(en effet $\|\sin\|_2^2 = \frac{1}{4}\|e_1\|_2^2 + \frac{1}{4}\|e_{-1}\|_2^2 = \frac{1}{2}$ car $e_1 \perp e_{-1}$ et e_1 et e_{-1} sont de norme 1).

4) $P_V(g) = P_V(f) + P_V(\sin)$ par linéarité de la projection.

De plus $P_V(\sin) = \sin$ car $\sin \in V$

et $$P_V(f) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

D'où $$P_V(g)(x) = \sin x + \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Exercice 2 : 1) D'après le théorème de Riesz-Fréchet si f est une forme linéaire continue sur ℓ^2, il existe $v=(v_n)_{n\geq 1}\in \ell^2$ tel-que : $\forall x\in \ell^2,\ f(x)=\langle x,v\rangle$.

On devrait donc avoir $f(e)=\langle e,v\rangle=1$ $(\forall n\geq 1)$. Mais $\langle e,v\rangle=\overline{\langle v,e\rangle}=\overline{v_n}$ donc $|v_n|^2=1$ pour tout $n\geq 1$ ce qui contredit le fait que $v\in\ell^2$ (puisque $\sum|v_n|^2=+\infty$).

Donc il n'existe pas de forme linéaire continue sur ℓ^2 telle que pour tout entier $n\geq 1$, $f(e^{(n)})=1$.

2) a) si $n\neq m$, $\langle v^{(n)},v^{(m)}\rangle=\langle e^{(2n-1)}+e^{(2n)},e^{(2m-1)}+e^{(2m)}\rangle$
$=\langle e^{(2n-1)},e^{(2m-1)}\rangle+\langle e^{(2n-1)},e^{(2m)}\rangle+\langle e^{(2n)},e^{(2m-1)}\rangle+\langle e^{(2n)},e^{(2m)}\rangle$
$=0$ car $2n-1\neq 2m-1$, $2n-1\neq 2m$, $2n\neq 2m-1$ et $2n\neq 2m$
(c'est clair pour $2n-1\neq 2m-1$ et $2n\neq 2m$ et les 2 autres conditions aussi car un nombre pair est toujours différent d'un nombre impair). Donc la famille $v^{(n)}, n\geq 1$ est orthogonale.

b) Soit $x=(x_n)_{n\geq 1}\in\ell^2$ tel que $\forall n\geq 1$, $\langle x,v^{(n)}\rangle=0 \iff$
$\langle x,e^{(2n-1)}\rangle+\langle x,e^{(2n)}\rangle=0 \iff x_{2n}=-x_{2n-1}$. D'où

$x=(x_1,-x_1,x_3,-x_3,x_5,-x_5,\dots)$. Un exemple d'un tel vecteur x de ℓ^2 est $(1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\dots)$. Donc x n'est pas forcément nul ce qui montre que la famille des $v^{(n)}$ n'est pas totale.

c) Soit $S_N=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}v^{(k)}$. Pour tout $M>N$, on a

$$S_M-S_N=\sum_{k=N+1}^{M}\frac{1}{k}v^{(k)}$$

et par le théorème de Pythagore :

$$\|S_M-S_N\|^2=\sum_{k=N+1}^{M}\frac{1}{k^2}\|v^{(k)}\|^2=\sum_{k=N+1}^{M}\frac{2}{k^2}$$

Or la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k^2}$ converge donc son reste tend vers zéro et en particulier $\|S_M-S_N\|^2\to 0$ si N et $M\to+\infty$.

Il en résulte que la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ est de Cauchy dans ℓ^2 donc elle converge (puisque ℓ^2 est complet) c'est à dire la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}v^{(n)}$ est donc convergente dans ℓ^2.

(on notera qu'elle n'est pas normalement convergente).

d) $s\notin V$ car s ne s'écrit pas comme combinaison linéaire finie des vecteurs $v^{(n)}$. Le sous espace V n'est donc pas fermé car la limite de la suite $S_N(\in V)$ n'appartient pas à V.

3) $x\in\ell^2$, $x\perp V\iff\forall n\geq 1,\langle x,v^{(n)}\rangle=0$ i.e.
$x_{2n-1}+x_{2n}=0\quad\forall n\geq 1$.

b) $V^\perp=\{x=(x_n)_{n\geq1}\in\ell^2\ /\ \forall n\geq 1,\ x_{2n-1}+x_{2n}=0\}$ est un sous espace fermé de ℓ^2 (comme tout orthogonal). De plus $x\in V^\perp$ est déterminé par ses coordonnées d'ordre impair puisque

$$x=\sum_{k=1}^{+\infty}x_{2k-1}\left(e^{(2k-1)}-e^{(2k)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\,x_{2k-1}\left(\frac{e^{(2k-1)}-e^{(2k)}}{\sqrt{2}}\right)$$

et ceci montre que les vecteurs $\frac{e^{(2k-1)}-e^{(2k)}}{\sqrt{2}}, k\geq 1$ forment une base hilbertienne de $V^\perp$ (car famille orthonormale et totale de $V^\perp$)