Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2007-2008**

L3 de Mathématiques **Samedi 14 juin 2008**

Corrigé de l'épreuve d'Espaces métriques 2ième session

Exercice I : 1) Φ est une forme linéaire (linéarité de l'intégrale) et pour $f \in E$, on a

$$|\Phi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)||g(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty |g(t)|dt = \|f\|_\infty \|g\|_1 ,$$

ce qui implique que Φ est continue et que $|||\Phi||| \leq \|g\|_1$. De plus comme g ne s'annule pas, g est de signe constant ϵ ($\epsilon = 1$ si $g > 0$ ou $\epsilon = -1$ si $g < 0$). La fonction constante $f = \epsilon$ vérifie $\|f\|_\infty = 1$ et $\Phi(f) = \|g\|_1$. Donc $|||\Phi||| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\Phi(f)| \geq \|g\|_1$. D'où $|||\Phi||| = \|g\|_1$.

2) Φ est une forme linéaire qui, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, vérifie $|\Phi(f) \leq ||f||_2||g||_2$ donc $|||\Phi||| \leq ||g||_2$. En prenant $f = \frac{g}{||g||_2}$, on a $||f||_2 = 1$ et $|\Phi(f)| = ||g||_2$, ce qui montre que $|||\Phi||| = ||g||_2$.

3) a) La propriété $||\lambda f||_F = |\lambda|||f||_F$ et l'inégalité triangulaire sont triviales. Supposons $||f||_F = 0$; alors $||f'||_\infty = 0$ et $|f'(0)| = 0$, mais $||f'||_\infty = 0$ implique f=C (constante) et $C = f(0) = 0$ donc $f = 0$. L'application $f \mapsto ||f||_F$ est donc bien une norme sur F.

Si maintenant $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de $(F, ||.||_F)$, on déduit que $(f_n(0))_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de nombres réels et $(f'_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de l'espace normé $C([0,1], ||.||_\infty)$ qui est complet d'après un théorème du cours. Donc il existe $g \in C([0,1])$ telle que $f'_n \to g$ uniformément sur $[0,1]$. Ceci implique que pour tout $t \in [0,1]$,

$$f_n(t) - f_n(0) = \int_0^t f'_n(x)dx \to \int_0^t g(x)dx = G(t) \quad (n \to +\infty),$$

où G est la primitive de g nulle en $t = 0$. Mais la limite $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = l$ existe car $\mathbb{R}$ est complet. La relation précédente montre alors que $f_n(t) \to G(t) + l$ $(n \to \infty)$. Si on pose $f(t) = G(t) + l$, alors $f \in F$ et on a bien $||f_n - f||_F = |f_n(0) - f(0)| + ||f'_n - f'||_\infty \to 0$ i.e. $(f_n)_{n\geq 1}$ converge. Donc $(F, ||.||_F)$ est complet.

b) Ψ est linéaire (linéarité de l'intégrale) et $\Psi(f) \in F$ car $\Psi(f)'(x) = -f(x)\cos(x)$ est une fonction continue comme produit de deux fonctions continues. De plus puisque la fonction cos est positive sur $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} ||\Psi(f)||_F &= \left|\int_0^1 f(t)\cos(t)\right| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)\cos(x)| \leq ||f||_\infty \int_0^1 \cos(t)dt + ||f||_\infty||\cos||_\infty \\ &\leq ||f||_\infty(\sin(1) + 1), \end{aligned}$$

inégalité qui prouve que Ψ est continue et que $|||\Psi||| \leq \sin(1) + 1 < 2$.

c) L'application $\frac{1}{3}\Psi$ est linéaire continue de F dans F donc lipschitzienne de rapport $k = \frac{1}{3}|||\Psi||| < \frac{2}{3} < 1$. D'après le théorème du point fixe l'équation $\frac{1}{3}\Psi(f) = f$ admet un point fixe unique dans F. Comme la fonction $f \equiv 0$ est solution évidente, c'est l'unique solution. Si on ne l'a pas remarqué, on dérive les 2 membres de l'équation précédente, ce qui donne $-f(x)\cos(x) = 3f'(x)$ et $f(1) = 0$; d'où $f(x) = Ce^{-\frac{1}{3}\sin(x)}$, mais $f(1) = 0$ exige $C = 0$ donc $f = 0$.

Exercice II : 1) A est la réunion des deux sphères d'équation $x^2+y^2+z^2=2$ et $x^2+y^2+z^2=1$ donc c'est un ensemble fermé (réunion de deux fermés) et borné donc un compact. Mais B n'est pas compact (cylindre de révolution d'axe Oz et de base le cercle $x^2+y^2=1$ dans le plan xOy). Les ensembles A et B ne sont donc pas homéomorphes puisque les homéomorphismes conservent la compacité.

2) • A est non borné car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(0,0,0,-n) \in A$ donc A n'est pas compact.
• B est fermé car $B = f^{-1}(\{0\})$ où $f(x,y,z,t) = x^4+y^4+z^4+t^2-1$ est une fonction polynomiale donc continue et $\{0\}$ est un ensemble fermé (singleton). De plus B est borné car $(x,y,z,t) \in B$ implique $x^4 \leq 1,\ y^4 \leq 1,\ z^4 \leq 1,\ t^2 \leq 1$ donc $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ et $-1 \leq t \leq 1$ ce qui montre que B est inclus dans le pavé $[-1,1]^4$. Les fermés bornés sont compacts en dimension finie donc B est compact.
• C n'est pas borné car pour tout entier $n > 1$, $\xi_n = (n, 0, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0) \in C$ et $||\xi_n||^2 = n^2 + \frac{1}{n} \to +\infty$ si $n \to +\infty$. Donc C n'est pas compact.

3) a) S est connexe (car connexe par arcs) donc $f(S)$ est connexe car la connexité est conservée par transformation continue. Comme les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, $f(S)$ est un intervalle. Mais S est compact (car fermé borné de $\mathbb{R}^3$) donc $f(S)$ est compact car la compacité est conservée par transformation continue. Donc $f(S)$ est un intervalle compact $[a,b]$.

b) f est bijective de S sur $[a,b]$. Soit $f^{-1} : [a,b] \to S$ l'application inverse. Cette application est continue car pour tout fermé $F \subset S$, F est compact et $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est compact donc fermé. L'application f^{-1} étant continue, bijective et d'inverse continue, c'est un homéomorphisme.

c) Enlevons un point $c \in]a,b[$. Alors l'ensemble $S \backslash \{f^{-1}(c)\}$ est toujours connexe (car connexe par arcs). Mais $f(S) \setminus \{f^{-1}(c)\} = [a,c[\cup]c,b]$ n'est pas connexe, ce qui est absurde car les transformations continues conservent la connexité. Conclusion : Il n'existe pas d'application continue et injective de S dans $\mathbb{R}$.

4) a) $f_n(x)$ appartient à l'intervalle $[f(x), x_0] \subset [0,1]$ (car c'est un barycentre intérieur des points $f(x)$ et x_0). Donc $f_n([0,1]) \subset [0,1]$. Pour tous $x, y \in [0,1]$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)|x-y|$ donc l'application f_n est contractante de rapport $k = 1 - \frac{1}{n} < 1$. Comme $[0,1]$ est complet, le théorème du point fixe implique qu'il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $f_n(a_n) = a_n$.

b) L'intervalle $[0,1]$ étant compact, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'il existe une sous-suite (a_{n_k}) et un point $a \in [0,1]$ telle que $a_{n_k} \to a$ $(k \to +\infty)$. En utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|f_{n_k}(a_{n_k}) - f(a)| \leq |f_{n_k}(a_{n_k}) - f(a_{n_k})| + |f(a_{n_k}) - f(a)|,$$

et comme a_{n_k} est point fixe de f_{n_k}, f est contractante et de l'expression de f_{n_k} en fonction de f et x_0, on déduit

$$|a_{n_k} - f(a)| \leq \frac{1}{n_k}|f(a_{n_k}) + x_0| + |a_{n_k} - a| \leq \frac{2}{n_k} + |a_{n_k} - a| \to 0\ (k \to +\infty).$$

Or $|a_{n_k} - f(a)| \to |a - f(a)|$ d'où$|a - f(a)| \leq 0$ (conservation des inégalités larges par passage à la limite). Donc $|a - f(a)| = 0$ i.e. a est un point fixe de f.

NB : Si vous trouvez des coquilles dans ce corrigé ou des solutions plus simples, merci de me le signaler sur mon email : gallardo@univ-tours.fr