Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2007-2008**

L3 de Mathématiques **Mercredi 18 juin 2008**

Corrigé de l'épreuve d'Espaces de Hilbert 2ième session

Exercice I : 1) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{n}x_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2\right)^{1/2} < +\infty$$

car la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente et $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|^2\right)^{1/2} = \|x\| < +\infty$ puisque $x \in \ell^2$. Ainsi la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x_n$ est absolument convergente donc convergente.

2) On remarque que $f(x) =< x, u >$ où $u = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est un vecteur de ℓ^2. D'après le théorème de Riesz-Fréchet, on sait que f est une forme linéaire continue sur ℓ^2 et que $|||f||| = \|u\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

3) On a

$$V = \left\{x \in \ell^2;\ x_1 = 0\right\}\bigcap\left\{x \in \ell^2;\ f(x) = 0\right\} = \mathrm{Ker}f_1\bigcap\mathrm{Ker}f,$$

où $f_1 : x = (x_k)_{k\geq 1} \mapsto x_1$ est aussi une forme linéaire continue (forme première coordonnée). Donc V est un sous-espace vectoriel comme intersection de deux sous-espaces vectoriels et V est fermé comme intersection de deux fermés (car f et f_1 sont continues).

Maintenant pour déterminer $V^\perp$, notons que $x \in V \iff x \perp e^{(1)}$ et $x \perp u$ où $e^{(1)} = (1, 0, \ldots)$ est le premier vecteur de la base hilbertienne canonique de ℓ^2 et u est défini dans 2). Donc $x \in V \iff x \perp V\left[e^{(1)}, u\right]$ (le sous espace de dimension 2 engendré par $e^{(1)}$ et u). Autrement dit on a $V = V\left[e^{(1)}, u\right]^\perp$. D'où

$$V^\perp = V\left[e^{(1)}, u\right]^{\perp\perp} = V\left[e^{(1)}, u\right].$$

Exercice II : D'après le théorème de projection, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}|t^2 - a - b\cos(t) - c\sin(t)|^2dt$ est minimale lorsque, dans l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi, \pi])$, la fonction $P_V(f) : t \mapsto a + b\cos(t) + c\sin(t)$ est la projection orthogonale de la fonction $f : t \mapsto t^2$ sur le sous-espace V de dimension 3 engendré par les fonctions $f_1 : t \mapsto 1$, $f_2 : t \mapsto \cos(t)$ et $f_3 : t \mapsto \sin(t)$ qui sont clairement orthogonales comme on le sait par la théorie des séries de Fourier. Si on norme ces fonctions on obtient la base orthonormale de V :

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} : t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}},\quad e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} : t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}.$$

Le théorème de projection donne alors $P_V(f) =< f, e_1 > e_1+ < f, e_2 > e_2+ < f, e_3 > e_3$. Les valeurs uniques de a, b et c qui réalisent le minimum de l'intégrale proposée sont donc

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < f, e_1 >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt = \frac{\pi^2}{3},\\
b &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f, e_2 >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos(t)dt = -4,\\
c &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} < f, e_3 >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\sin(t)dt = 0.
\end{aligned}$$

Exercice III : 1) Si $f \in V_n$, $f = \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_k \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$, où α_k est la valeur constante que prend f sur l'intervalle $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$. Toute combinaison linéaire de telles fonctions est encore de la même forme donc V_n est un sous-espace vectoriel. Les fonctions

$$v_k = \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1),$$

engendrent V_n et sont orthogonales (car à supports disjoints) donc elles sont linéairement indépendantes et constituent ainsi une base de V_n. D'où $\dim(V_n) = 2^n$ et V_n est fermé dans H puisqu'il est de dimension finie. Une base orthonormale de V_n s'obtient en normalisant les vecteurs v_k et puisque $\|v_k\|^2 = \frac{1}{2^n}$, les vecteurs $e_k = 2^{n/2} v_k$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$ forment une base orthonormale de V_n.

2) La fonction $P_{V_n}(f) = \sum_{k=0}^{2^n-1} < f, e_k > e_k = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n < f, f_k > f_k$ est la projection orthogonale de $f \in H$ sur V_n. Autrement dit la valeur de $P_{V_n}(f)(x)$ pour $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ vaut

$$P_{V_n}(f)(x) = 2^n < f, f_k >= 2^n \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(t)dt.$$

On a donc bien $P_{V_n}(f) = f_n$.

3) a) Une fonction constante sur les intervalles $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ est a fortiori aussi constante sur les intervalles $[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}[$ $(l = 0, \ldots, 2^{n+1} - 1)$ donc V_n est inclus dans V_{n+1} (et plus précisément, V_n est un sous-espace de V_{n+1}). Montrer que $f_{n+1} - f_n \perp V_n$ équivaut à montrer que $P_{V_n}(f_{n+1} - f_n) = 0$ c'est à dire à prouver que $P_{V_n}(f_{n+1}) = f_n$. Supposons $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ et notons que $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[= [\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}[\cup[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}[$. Alors en tenant compte de l'expression de f_{n+1} sur ces deux intervalles, on obtient

$$\begin{aligned}
P_{V_n}(f_{n+1})(x) &= 2^n \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f_{n+1}(t)dt \\
&= 2^n \left(\int_{(2k)2^{-(n+1)}}^{(2k+1)2^{-(n+1)}} f_{n+1}(t)dt + \int_{(2k)2^{-(n+1)}}^{(2k+1)2^{-(n+1)}} f_{n+1}(t)dt \right) \\
&= 2^n \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(t)dt = f_n(x).
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai sur tout intervalle $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$, on a bien $P_{V_n}(f_{n+1}) = f_n$.

b) On a déjà obtenu que $P_{V_n}(f_{n+1}) = f_n$. Donc pour tout entier n

$$\|f_n\| = \|P_{V_n}(f_{n+1})\| \leq \|f_{n+1}\|$$

car la projection contracte les normes. Donc la suite $(||f_n||)_{n\geq 1}$ est croissante ; de plus elle est majorée (car $\|f_n\| = \|P_{V_n}(f)\| \leq \|f\|$, toujours par contraction de la norme), donc elle est convergente.

Exercice IV : 1) Notons que $|x_{2k-1} + x_{2k}|^2 + |x_{2k-1} - x_{2k}|^2 = 2(|x_{2k-1}|^2 + |x_{2k}|^2)$ pour tout entier k (égalité du parallélogramme) donc pour tout entier $N \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \frac{|x_{2k-1} + x_{2k}|^2}{k^2} + \frac{|x_{2k-1} - x_{2k}|^2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k^2}(|x_{2k-1}|^2 + |x_{2k}|^2) \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{2N} |x_k|^2 \leq 2 \|x\|^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\|Ax\|^2 \leq 2\|x\|^2 < +\infty$. Ce qui prouve que $Ax \in \ell^2$.

2) Comme A est linéaire, l'inégalité précédente $\|Ax\| \leq \sqrt{2}\|x\|$ montre que A est un opérateur continu est que $|||A||| \leq \sqrt{2}$. Mais pour le vecteur $e^{(1)} = (1, 0, \ldots)$ (premier vecteur de la base hilbertienne canonique de ℓ^2), qui est de norme 1, on a $||Ae^{(1)}||^2 = 2$, ce qui montre que $|||A||| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| \geq \sqrt{2}$. Les deux inégalités montrent que $|||A||| = \sqrt{2}$.

3) Pour tous $x, y \in \ell^2$, on a

$$\begin{aligned}
< Ax, y > &= \frac{(x_1 + x_2)}{1}\overline{y_1} + \frac{(x_1 - x_2)}{1}\overline{y_2} + \cdots + \frac{(x_{2k-1} + x_{2k})}{k}\overline{y_{2k-1}} + \frac{(x_{2k-1} - x_{2k})}{k}\overline{y_{2k}} + \cdots \\
&= x_1\overline{\frac{y_1 + y_2}{1}} + x_2\overline{\frac{y_1 - y_2}{1}} + \cdots + x_{2k-1}\overline{\frac{y_{2k-1} + y_{2k}}{k}} + x_{2k}\overline{\frac{y_{2k-1} - y_{2k}}{k}} + \cdots \\
&= < x, Ay > .
\end{aligned}$$

Ceci montre que $< x, A^*y > = < x, Ay >$ pour tout $x \in \ell^2$ donc $A^*y = Ay$, d'où $A^* = A$.

4) Si $e^{(n)}$, $(n \geq 1)$ désigne la base hilbertienne canonique de ℓ^2, on a $||Ae^{(2k-1)}||^2 = ||Ae^{(2k)}||^2 = \frac{2}{k^2}$. Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||Ae^{(n)}||^2 = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

ce qui montre que l'opérateur A est de Hilbert-Schmidt. Comme de plus A est autoadjoint d'après 3), le théorème spectral montre que A est diagonalisable.

5) $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x(\neq 0) \in \ell^2$ sont tels que $Ax = \lambda x$ si et seulement si pour tout $k \geq 1$, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{k}(x_{2k-1} + x_{2k}) & = & \lambda x_{2k-1} \\ \frac{1}{k}(x_{2k-1} - x_{2k}) & = & \lambda x_{2k} \end{array} \right.$$

S'il existe un $k \geq 1$ tel que $x_{2k-1} \neq 0$ ou $x_{2k} \neq 0$, ceci montre que λ est valeur propre de la matrice $M_k = \begin{pmatrix} 1/k & 1/k \\ 1/k & -1/k \end{pmatrix}$ et de vecteur propre associé $\begin{pmatrix} x_{2k-1} \\ x_{2k} \end{pmatrix}$. Mais $\det(M_k - \lambda I) = 0$ donc $\lambda^2 - \frac{2}{k^2} = 0$ i.e. $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{k}$.

On voit alors que pour tout $i \neq k$, on doit avoir $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$, sinon λ devrait être valeur propre d'une autre matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1/i & 1/i \\ 1/i & -1/i \end{pmatrix}$ ce qui est impossible. Le calcul (trivial) des vecteurs propres de la matrice M_k, montre aussitôt que pour la valeur propre $\lambda_k = \frac{\sqrt{2}}{k}$, le vecteur propre (normalisé) de l'opérateur A est le vecteur $v^{(k)}$ de ℓ^2 donné par

$$v^{(k)} = (0, \ldots, 0, x_{2k-1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 1}}, x_{2k} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 1}}, 0, \ldots)$$

alors que pour la valeur propre $\lambda_{-k} = -\frac{\sqrt{2}}{k}$, le vecteur propre (normalisé) est

$$v^{(-k)} = (0, \ldots, 0, x_{2k-1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}}, x_{2k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + 1}}, 0, \ldots).$$

Comme A est injectif (car il est facile de voir que $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$), un théorème du cours nous assure que l'ensemble de tous les vecteurs $v^{(k)}$ et $v^{(-k)}$ pour $k \geq 1$ constitue une base hilbertienne de ℓ^2.

NB : Si vous trouvez une coquille dans ce corrigé ou une démonstration plus courte merci de me le signaler sur mon email : gallardo@univ-tours.fr