Devoir de Probabilités 1 du 26.11-2010. Master AMA et MIMATS

Exercice 1 Pour S_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ $\mathbb{E}(S_n) = np$ et $\mathrm{Var}\, S_n = np(1-p)$. Par le Théorème limite central

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) \text{ (loi normale centrée réduite)}$$

D'où $\forall a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(-a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le a\right) \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 2\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - 1$$

si $a = 1{,}96$

$$\mathbb{P}\left(-1{,}96 \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 1{,}96\right) = 2(0{,}975) - 1 = 0{,}95$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le p \le \frac{S_n}{n} + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

(si n est grand). Pour $n = 100$, on a observé $\frac{S_n}{n} = 0{,}51$ et on a vu en cours que $\sqrt{p(1-p)} \simeq \sqrt{0{,}51(0{,}49)} = 0{,}4999$.

D'où l'intervalle de confiance de p au niveau de confiance $0{,}95$:

$$I = \left[0{,}51 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}4999}{10}, 0{,}51 + 1{,}96\,\frac{0{,}4999}{10}\right]$$

$$= [0{,}51 - 0{,}0979, 0{,}51 + 0{,}0979]$$

$$= [0{,}4121, 0{,}6079].$$

Exercice 2 a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = c\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = c\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = c$

D'où $c = 1$.

b) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée.

Calculons $\mathbb{E}(h(X+Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x+y)\, d\mu_{(X,Y)}(x,y)$ où $\mu_{(X,Y)}$ est la loi du couple (X,Y). Mais comme X et Y sont indépendantes de densité égale à f, on a $d\mu_{(X,Y)} = f(x)f(y)\,dx\,dy$

D'où

$$\mathbb{E}(h(X+Y)) = \iint_{[0,+\infty[^2} h(x+y)\, e^{-x} e^{-y}\, dx\,dy$$

faisons le changement de variable $u = x+y$ $v = y$

soit $\frac{du\,dv}{dx\,dy} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

le domaine d'intégration est $\begin{cases} 0 \le u - v < +\infty \\ 0 \le v < +\infty \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 0 \le v \le u \\ 0 \le u < +\infty \end{cases}$. D'où

$$\mathbb{E}(h(X+Y)) = \iint_{\substack{0 \le v \le u \\ 0 \le u < +\infty}} h(u)\, e^{-u}\, du\,dv = \int_0^{+\infty} h(u)\, u e^{-u}\, du$$

Donc $X+Y$ a une densité égale à $u \mapsto u e^{-u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$.

2) X a une densité égale à $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ par définition.

$1 + [X]$ est une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\begin{cases} \mathbb{P}(1 + [X] = 1 + k) = \mathbb{P}([X] = k) = \mathbb{P}(k \le X < k+1) \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$= \int_0^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{k+1} =$$

$e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}$.

3) f est borélienne ≥ 0. C'est une densité si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

c'est à dire $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda |x| e^{-|x|} dx = 1 = 2\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-x} dx = 2\lambda \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

on intègre par parties avec $u = x$, $v' = e^{-x}$. D'où

$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. La

condition est donc $2\lambda = 1 \iff \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$.