UNIVERSITÉ DE TOURS **MASTER DE MATH.1-ière année**

FORMULAIRE du cours PROBABILITÉS 2

I) Fonctions caractéristiques : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de loi μ_X. La fonction caractéristique de X est la fonction $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle que

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i<t,X>}) = \int_\Omega e^{i<t,X(\omega)>} d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<t,x>} d\mu_X(x).$$

• Si X_i $(i = 1, \dots, n)$ sont des vecteurs aléatoires indépendants de $\mathbb{R}^d$ et si $S = \sum_{i=1}^n X_i$ alors : $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_S(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$.
• Si d=1 et si $X \in L^p$ (p entier > 0) alors φ_X est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} d\mu_X(x) \text{ (pour tout entier } 1 \le k \le p).$$

• Si d=1 et si la fonction caractéristique φ_X de X est p fois dérivable en $t = 0$, alors X a des moments jusqu'à l'ordre pair $2n$ tel que $2n \le p$.
• (développement limité de φ_X) : Si X est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ ayant un moment d'ordre k (i.e. $\mathbb{E}(||X||^k) < +\infty$), alors $\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(i)^j}{j!} \mathbb{E}(< t, X >^j) + ||t||^k \epsilon(t)$ (où $\lim_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$).
• (formule d'inversion dans le cas $d = 1$) : Si la fonction $|\varphi_X(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors la variable aléatoire X a une densité f donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t) e^{-itx} dt \quad \text{(p.p. en } x, \text{pour tout } x \text{ si } f \text{ est continue).}$$

• $(d = 1)$ Si X est de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\varphi_X(t) = e^{itm} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.
• (indépendance) : Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Les variables aléatoires composantes X_i $(i = 1, \dots, d)$ sont indépendantes si et seulement si : $\forall t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d,\ \varphi_X(t) = \prod_{i=1}^d \varphi_{X_i}(t_i)$.
• (convergence en loi et théorème de Paul-Lévy) : Soit X_n $(n \in \mathbb{N})$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$. Si X est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$ tel que X_n converge en loi vers X alors pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n \to +\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$. Inversement (théorème de P.Lévy) si les X_n sont tels que $\lim_{n \to +\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi(t) \in \mathbb{C}$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ et si φ est continue en $t = 0$, il existe un vecteur aléatoire X tel que φ soit sa fonction caractéristique et on a $X_n \to X$ en loi quand $n \to +\infty$.

II) Vecteurs aléatoires gaussiens et Théorème limite central dans $\mathbb{R}^d$: Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ de $\mathbb{R}^d$ est gaussien si pour tout $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, $< t, X >= t_1X_1 + \cdots + t_dX_d$ est une variable aléatoire normale.
• (fonction caractéristique) : si X est gaussien : $\forall t \in \mathbb{R}^d,\ \varphi_X(t) = e^{i<m,t>} e^{-\frac{1}{2}<t,\Gamma t>}$, où $\Gamma = (\text{cov}(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le d}$ est la matrice des covariances de X et $m = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_d))$. On note $\mathcal{N}_d(m, \Gamma)$ la loi de X. Si $\det(\Gamma) = 0$, on dit que le vecteur gaussien X est dégénéré.
• Une matrice Γ $d \times d$ est la matrice des covariances d'un vecteur gaussien si et seulement si elle est symétrique et de type positif, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}^d,\ < t, \Gamma t > \ge 0$.
• La densité d'un vecteur $\mathcal{N}_d(m, \Gamma)$ non dégénéré, est de la forme

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} < x - m, \Gamma^{-1}(x - m) > \right) \ (x \in \mathbb{R}^d).$$

• (théorème limite central dans $\mathbb{R}^d$) : Soit (X_k) une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$, indépendants et de même loi, centrée et ayant un moment d'ordre 2. On note Γ la matrice des covariances des (X_k). Alors la suite des vecteurs $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \quad (n \in \mathbb{N}^*)$, converge en loi vers la loi gaussienne $\mathcal{N}_d(0, \Gamma)$.

III) Espérance conditionnelle : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
• (espérance conditionnelle, définition) : L'espace L^2 des v.a. réelles muni du produit scalaire : $< X, Y >= \mathbb{E}(XY)$ est un espace de Hilbert. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, $L^2(\mathcal{B})$ l'espace des v.a. de L^2 qui sont $\mathcal{B}$-mesurables, est un s.e.v. fermé de L^2. Si $X \in L^2$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$ est la projection orthogonale de X sur $L^2(\mathcal{B})$, l'opérateur de projection $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$ est l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{B}$. Cet opérateur linéaire se prolonge à L^1. Il satisfait les propriétés suivantes (toutes les égalités et inégalités ci-dessous entre v.a. sont au sens presque-sûrement) :
• (propriété caractéristique) : Si $X \in L^1$ (resp. $X \in L^2$), $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$ est l'unique v.a. de $L^1(\mathcal{B})$ (resp. de $L^2(\mathcal{B})$) telle que : $\forall B \in \mathcal{B}, \int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) d\mathbb{P}$.
• (linéarité) : $\forall X, Y \in L^1,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) + \mu \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Y)$.
• (contraction) : Si $X \in L^1$ (resp. $X \in L^2$), $||\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)||_1 \leq ||X||_1$ (resp. $||\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)||_2 \leq ||X||_2$).
• (propriété des 3 perpendiculaires) : Si $X \in L^1$ et si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) = \mathbb{E}^{\mathcal{C}}(X)$.
• (formule de l'espérance totale) : $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)\right) = \mathbb{E}(X)$.
• (sortie de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$) : $\forall Z \in L^\infty(\mathcal{B}),\ X \in L^1$ (resp. $\forall Z \in L^2(\mathcal{B}),\ X \in L^2$), $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(ZX) = Z\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$.
• (positivité et convergence monotone) : Si $X \geq 0$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) \geq 0$. Si $X \in L^1$ est de signe quelconque, $|\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(|X|)$. Si $0 \leq X_n$ et si $X_n \nearrow X$, alors on a aussi $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X_n) \nearrow \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$.
• (espérance conditionnelle et indépendance) : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des sous-tribus indépendantes, $X \in L^1(\mathcal{B})$ et $Y \in L^1(\mathcal{C})$ des v.a., alors $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}(X) = \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Y) = \mathbb{E}(Y)$.
• (espérance conditionnelle par rapport à un vecteur aléatoire X) : Si X est un v.a. et $Y \in L^1$, $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_X}(Y)$ où $\mathcal{B}_X$ est la sous-tribu engendrée par X. Il existe alors $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $\mathbb{E}(Y|X) = \phi \circ X = \phi(X)$.
• (espérance conditionnelle par rapport à une v.a. discrète) : Si X est une v.a. discrète prenant les valeurs (x_k), alors $\mathbb{E}(Y|X) = \sum_k \mathbb{E}(Y|X = x_k)\mathbf{1}_{[X=x_k]}$.
• Si le couple (X, Y) a une densité $f(x, y)$, alors $\mathbb{E}(Y|X) = \phi(X)$ où $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy$ et $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ est la densité de X.

IV) Martingales : Soit $(\mathcal{B}_n)$ une filtration de $\mathcal{F}$ (suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$) et (X_n) une suite de v.a. de L^1 adaptée à $(\mathcal{B}_n)$ (i.e. $\forall n,\ X_n$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable). On dit que (X_n) est une $\mathcal{B}_n$-martingale (resp. $\mathcal{B}_n$-sous-martingale, resp. $\mathcal{B}_n$-sur-martingale) si :
$\forall n,\ \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) = X_n$ (resp. $X_n \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1})$, resp. $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \leq X_n$).
• (constance de l'espérance) : Si (X_n) est une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une sur-martingale), alors la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 1}$ est constante (resp. croissante, resp. décroissante).
• (exemple) : Si $(\mathcal{B}_n)$ est une filtration et $Z \in L^1$ une v.a., $X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z)$ est une martingale.
• (exemple) : Si (Z_i) est une suite de v.a. i.i.d., centrées et dans L^1, la suite $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{B}(Z_1, \ldots, Z_n))$ (resp. $(\mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n))$).
• (observation fondamentale) : Si (X_n) est une martingale de L^2, $(\mathbb{E}(X_n^2))_{n\geq 1}$ est une suite croissante.
• La martingale (X_n) est bornée dans L^2 si $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$.
• (théorème de structure L^2) : Si la martingale (X_n) est bornée dans L^2, elle converge dans L^2 vers une v.a. $X_\infty \in L^2(\mathcal{B}_\infty)$ où $\mathcal{B}_\infty$ est la tribu terminale, de plus : $\forall n,\ X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_\infty)$. Réciproquement, si $Y \in L^2$ et $Y_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y)$, (Y_n) est une martingale bornée dans L^2 qui converge vers Y dans L^2.
• (Théorème de convergence p.s.) : Toute martingale (X_n) bornée dans L^2 converge p.s. vers sa valeur finale X_∞.
• (Autres théorèmes non au programme de l'examen) : Toute martingale positive converge p.s.. Toute martingale bornée dans L^p $(p > 1)$ converge p.s. et dans L^p. Toute martingale bornée dans L^1 converge p.s. (mais pas forcément dans L^1). Une martingale converge dans L^1 si et seulement si elle est régulière (i.e. de la forme $X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z)$, où $Z \in L^1$).

V) Introduction aux files d'attente : Dans un système d'attente, la ligne d'attente est le processus stochastique (à valeurs dans $\mathbb{N}$), $X = (X_t)_{t\geq 0}$ qu'on suppose markovien, où X_t est le nombre total de clients dans le système à l'instant t (y compris ceux qui sont en train d'être servis).
• (processus de Poisson) : Quand il y a 0 serveur (les clients s'accumulent sans être servis) on dit que le processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson s'il est homogène, à accroissements indépendants et si $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t > 1) = o(h)$ (si $h \to 0$). Il existe alors une constante λ (l'intensité) telle que pour tout $t > 0$, X_t est de loi de Poisson de paramètre λt.
• (processus de naissance et mort) : On dit que le processus de Markov X est de naissance et mort, s'il est homogène, si lors des changements d'états les accroissements sont $+1$ ou -1 et s'il existe deux suites de nombres positifs $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ et $(\mu_n)_{n\geq 0}$ (les intensités) telles que les probabilités de transition $P_{i,j}(t) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j|X_s = i)$ vérifient les conditions suivantes (lorsque $h \to 0$) :
a) $P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h)$ si $i \geq 0$
b) $P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h)$ si $i \geq 1$
c) $P_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)$ si $i \geq 0$
d) $P_{i,j}(0) = \delta_{ij}$
e) $\mu_0 = 0$, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_n,\ \mu_n\ > 0$ si $n > 0$.
La constante λ_n (resp. μ_n) est appelée intensité (ou taux) de naissance ou d'entrée (resp. de décès ou de sortie) en l'état n.
• (équations de Chapman-Kolmogorov) : $\forall i, j \in \mathbb{N}, \forall t, s > 0,\ P_{i,j}(t+s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{i,k}(t)P_{k,j}(s)$.
• (équations de Kolmogorov du passé) : Les fonctions $t \mapsto P_{i,j}(t)$ vérifient le système d'équations différentielles :
$\frac{d}{dt}P_{0,j}(t) = -\lambda_0 P_{0,j}(t) + \lambda_0 P_{1,j}(t)$
$\frac{d}{dt}P_{i,j}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{i,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t)$ (si $i \geq 1$)
• (équations de Kolmogorov du futur) : sous la condition supplémentaire
(C) $\sum_{k\notin\{j-1,j,j+1\}} P_{i,k}(t)P_{k,j}(h) = o(h)$ $(h \to 0)$, les $P_{i,j}(t)$ satisfont le système d'équations différentielles $P_{i,j}(0) = \delta_{ij}$ et
$\frac{d}{dt}P_{i,0}(t) = -\lambda_0 P_{i,0}(t) + \mu_1 P_{i,1}(t)$
$\frac{d}{dt}P_{i,j}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_{i,j}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t)$ (si $j \geq 1$)
• (loi stationnaire) : Si le processus de naissance et mort X vérifie la condition (C), pour tout $i \in \mathbb{N}$, la limite $\lim_{t\to+\infty} P_{i,j}(t) = p_j$ existe, la famille $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ satisfait les équations
a) $-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0$
b) $\lambda_{j-1}p_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)p_j + \mu_{j+1}p_{j+1} = 0$ ($j \geq 1$).
De plus si $\pi_0 = 1$, $\pi_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}$ $(j \geq 1)$ et si $\sum_{k=0}^{+\infty} \pi_k < +\infty$, $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une loi stationnaire pour le processus X. Par exemple si les intensités sont constantes ($\lambda_n = \lambda$, $n \geq 0$ et $\mu_n = \mu$, $n \geq 1$) et si $\lambda < \mu$, X a pour loi stationnaire la loi géométrique de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$.
• (temps de séjour) : Pour tout $i \geq 0$, le temps de séjour T_i du processus X dans l'état i est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda_i + \mu_i$.
• (mécanisme de saut) : Pour tout $i \geq 1$, partant de i à l'instant 0, à l'instant T_i le processus X saute en $i + 1$ avec la probabilité $\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$ ou en $i - 1$ avec la probabilité $\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}$.
• (système d'attente à s serveurs) : si les entrées dans le système se font à intensité constante $\lambda_n = \lambda$ pour tout n et que les s serveurs ont chacun le même taux de service μ (indépendant de n), la ligne d'attente est un processus de naissance et mort d'intensités : $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n\mu$ si $n \leq s$ et $\mu_n = s\mu$ si $n > s$.