

FORMULAIRE du cours PROBABILITÉS 2

I) Fonctions caractéristiques : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de loi μ_X . La fonction caractéristique de X est la fonction $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X \rangle}) = \int_{\Omega} e^{i\langle t, X(\omega) \rangle} d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} d\mu_X(x).$$

• Si X_i ($i = 1, \dots, n$) sont des vecteurs aléatoires indépendants de \mathbb{R}^d et si $S = \sum_{i=1}^n X_i$ alors : $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_S(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$.

• Si $d=1$ et si $X \in L^p$ (p entier > 0) alors φ_X est p fois dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} d\mu_X(x) \text{ (pour tout entier } 1 \leq k \leq p).$$

• Si $d=1$ et si la fonction caractéristique φ_X de X est p fois dérivable en $t = 0$, alors X a des moments jusqu'à l'ordre pair $2n$ tel que $2n \leq p$.

• (développement limité de φ_X) : Si X est un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^d ayant un moment d'ordre

k (i.e. $\mathbb{E}(\|X\|^k) < +\infty$), alors $\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(i)^j}{j!} \mathbb{E}(\langle t, X \rangle^j) + \|t\|^k \epsilon(t)$ (où $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$).

• (formule d'inversion dans le cas $d = 1$) : Si la fonction $|\varphi_X(t)|$ est intégrable sur \mathbb{R} , alors la variable aléatoire X a une densité f donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t) e^{-itx} dt \quad (\text{p.p. en } x, \text{ pour tout } x \text{ si } f \text{ est continue}).$$

• ($d = 1$) Si X est de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\varphi_X(t) = e^{itm} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$.

• (indépendance) : Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d . Les variables aléatoires composantes X_i ($i = 1, \dots, d$) sont indépendantes si et seulement si :

$\forall t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(t) = \prod_{i=1}^d \varphi_{X_i}(t_i)$.

• (convergence en loi et théorème de Paul-Lévy) : Soit X_n ($n \in \mathbb{N}$) une suite de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d . Si X est un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^d tel que X_n converge en loi vers X alors pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$. Inversement (théorème de P.Lévy) si les X_n sont tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi(t) \in \mathbb{C}$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ et si φ est continue en $t = 0$, il existe un vecteur aléatoire X tel que φ soit sa fonction caractéristique et on a $X_n \rightarrow X$ en loi quand $n \rightarrow +\infty$.

II) Vecteurs aléatoires gaussiens et Théorème limite central dans \mathbb{R}^d : Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ de \mathbb{R}^d est gaussien si pour tout $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, $\langle t, X \rangle = t_1 X_1 + \dots + t_d X_d$ est une variable aléatoire normale.

• (fonction caractéristique) : si X est gaussien : $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(t) = e^{i\langle m, t \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle t, \Gamma t \rangle}$, où $\Gamma = (\text{cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq d}$ est la matrice des covariances de X et $m = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_d))$. On note $\mathcal{N}_d(m, \Gamma)$ la loi de X . Si $\det(\Gamma) = 0$, on dit que le vecteur gaussien X est dégénéré.

• Une matrice Γ $d \times d$ est la matrice des covariances d'un vecteur gaussien si et seulement si elle est symétrique et de type positif, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\langle t, \Gamma t \rangle \geq 0$.

• La densité d'un vecteur $\mathcal{N}_d(m, \Gamma)$ non dégénéré, est de la forme

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle x - m, \Gamma^{-1}(x - m) \rangle\right) \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

• (théorème limite central dans \mathbb{R}^d) : Soit (X_k) une suite de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d , indépendants et de même loi, centrée et ayant un moment d'ordre 2. On note Γ la matrice des covariances des (X_k) . Alors la suite des vecteurs $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k$ ($n \in \mathbb{N}^*$), converge en loi vers la loi gaussienne $\mathcal{N}_d(0, \Gamma)$.

III) Espérance conditionnelle : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

• (espérance conditionnelle, définition) : L'espace L^2 des v.a. réelles muni du produit scalaire : $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ est un espace de Hilbert. Si \mathcal{B} est une sous-tribu de \mathcal{F} , $L^2(\mathcal{B})$ l'espace des v.a. de L^2 qui sont \mathcal{B} -mesurables, est un s.e.v. fermé de L^2 . Si $X \in L^2$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$ est la projection orthogonale de X sur $L^2(\mathcal{B})$, l'opérateur de projection $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$ est l'espérance conditionnelle sachant \mathcal{B} . Cet opérateur linéaire se prolonge à L^1 . Il satisfait les propriétés suivantes (toutes les égalités et inégalités ci-dessous entre v.a. sont au sens presque-sûrement) :

- (propriété caractéristique) : Si $X \in L^1$ (resp. $X \in L^2$), $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$ est l'unique v.a. de $L^1(\mathcal{B})$ (resp. de $L^2(\mathcal{B})$) telle que : $\forall B \in \mathcal{B}, \int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) d\mathbb{P}$.
- (linéarité) : $\forall X, Y \in L^1, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) + \mu \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Y)$.
- (contraction) : Si $X \in L^1$ (resp. $X \in L^2$), $\|\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)\|_1 \leq \|X\|_1$ (resp. $\|\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)\|_2 \leq \|X\|_2$).
- (propriété des 3 perpendiculaires) : Si $X \in L^1$ et si $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}, \mathbb{E}^{\mathcal{C}}\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) = \mathbb{E}^{\mathcal{C}}(X)$.
- (formule de l'espérance totale) : $\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)) = \mathbb{E}(X)$.
- (sortie de $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}$) : $\forall Z \in L^\infty(\mathcal{B}), X \in L^1$ (resp. $\forall Z \in L^2(\mathcal{B}), X \in L^2$), $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(ZX) = Z\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$.
- (positivité et convergence monotone) : Si $X \geq 0, \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X) \geq 0$, si $X \in L^1$ est de signe quelconque, $|\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(|X|)$, et si $X_n \nearrow X$, alors on a aussi $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X_n) \nearrow \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(X)$.
- (espérance conditionnelle et indépendance) : Si \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des sous-tribus indépendantes, $X \in L^1(\mathcal{B})$ et $Y \in L^1(\mathcal{C})$ des v.a., alors $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}(X) = \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Y) = \mathbb{E}(Y)$.
- (espérance conditionnelle par rapport à un vecteur aléatoire X) : Si X est un v.a. et $Y \in L^1, \mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_X}(Y)$ où \mathcal{B}_X est la sous-tribu engendrée par X . Il existe alors $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $\mathbb{E}(Y|X) = \phi \circ X = \phi(X)$.
- (espérance conditionnelle par rapport à une v.a. discrète) : Si X est une v.a. discrète prenant les valeurs (x_k) , alors $\mathbb{E}(Y|X) = \sum_k \mathbb{E}(Y|X = x_k) \mathbf{1}_{[X=x_k]}$.
- Si le couple (X, Y) a une densité $f(x, y)$, alors $\mathbb{E}(Y|X) = \phi(X)$ où $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$ et $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ est la densité de X .

III) Martingales : Soit (\mathcal{B}_n) une filtration de \mathcal{F} (suite croissante de sous-tribus de \mathcal{F}) et (X_n) une suite de v.a. de L^1 adaptée à (\mathcal{B}_n) (i.e. $\forall n, X_n$ est \mathcal{B}_n -mesurable). On dit que (X_n) est une \mathcal{B}_n -martingale (resp. \mathcal{B}_n -sous-martingale, resp. \mathcal{B}_n -sur-martingale) si :

$\forall n, \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) = X_n$ (resp. $X_n \leq \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}),$ resp. $\mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1}) \leq X_n$).

- (constance de l'espérance) : Si (X_n) est une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une sur-martingale), alors la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \geq 1}$ est constante (resp. croissante, resp. décroissante).
- (exemple) : Si (\mathcal{B}_n) est une filtration et $Z \in L^1$ une v.a., $X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z)$ est une martingale.
- (exemple) : Si (Z_i) est une suite de v.a. i.i.d., centrées et dans L^1 , la suite $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{B}(Z_1, \dots, Z_n))$ (resp. $(\mathcal{B}(X_1, \dots, X_n))$).
- (observation fondamentale) : Si (X_n) est une martingale de $L^2, (\mathbb{E}(X_n^2))_{n \geq 1}$ est une suite croissante.
- La martingale (X_n) est bornée dans L^2 si $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$.
- (théorème de structure L^2) : Si la martingale (X_n) est bornée dans L^2 , elle converge dans L^2 vers une v.a. $X_\infty \in L^2(\mathcal{B}_\infty)$ où \mathcal{B}_∞ est la tribu terminale, de plus : $\forall n, X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(X_\infty)$. Réciproquement, si $Y \in L^2$ et $Y_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Y), (Y_n)$ est une martingale bornée dans L^2 qui converge vers Y dans L^2 .
- (Théorème de convergence p.s.) : Toute martingale (X_n) bornée dans L^2 converge p.s. vers sa valeur finale X_∞ .
- (Autres théorèmes non au programme de l'examen) : Toute martingale positive converge p.s.. Toute martingale bornée dans L^p ($p > 1$) converge p.s. et dans L^p . Toute martingale bornée dans L^1 converge p.s. (mais pas forcément dans L^1). Une martingale converge dans L^1 si et seulement si elle est régulière (i.e. de la forme $X_n = \mathbb{E}^{\mathcal{B}_n}(Z),$ où $Z \in L^1$).