Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2009-2010**

Master 1 de Mathématiques **Lundi 3 mai 2010**

Épreuve de Probabilités 2 (Durée : 3 heures)

Le seul document autorisé est le formulaire joint au sujet.
Tout matériel électronique est interdit.

Les trois exercices sont indépendants

I

1) Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que les variables aléatoires composantes X_i $(1 \leq i \leq n)$ sont indépendantes et de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ si et seulement si la fonction caractéristique ϕ_X de X est de la forme

$$\phi_X(t) = \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 ||t||^2) \quad t \in \mathbb{R}^n \quad (*),$$

où $||t||$ est la norme euclidienne du vecteur t. En déduire alors la loi de la variable aléatoire $< t, X >$ (produit scalaire de t et X) pour tout vecteur $t \in \mathbb{R}^n$.

2) Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de fonction caractéristique (*) et A une matrice orthogonale $n \times n$. Démontrer que le vecteur aléatoire $Y = AX$ (transformé de X par A) a la même loi que X.

3) Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ de fonction caractéristique (*) et M une matrice $n \times n$ quelconque. Démontrer que le vecteur aléatoire $Z = MX$ est gaussien et préciser sa matrice des covariances.

4) Soient X et Y deux vecteurs aléatoires gaussiens de $\mathbb{R}^n$, indépendants. On suppose que X est de loi $\mathcal{N}_n(m_1, \Gamma_1)$ et Y est de loi $\mathcal{N}_n(m_2, \Gamma_2)$. Calculer la loi du vecteur aléatoire $X - 2Y$.

II

Les parties A et B ne sont pas indépendantes

Partie A) Soient $Z, X_1, X_2, \ldots, X_k, \cdots$ des variables aléatoires indépendantes, ayant un moment d'ordre deux et à valeurs entières. On suppose que les X_k, $k \geq 1$ sont de même loi et on note m leur espérance et σ^2 leur variance. On définit une variable aléatoire Y par :

$$Y = \mathbf{1}_{[Z>0]} \sum_{k=1}^{Z} X_k$$

(autrement dit $Y = 0$ si $Z = 0$ et $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ si $Z = n$ $(n \geq 1)$). Soit $\mathbb{E}(Y|Z)$ la variable aléatoire espérance conditionnelle de Y sachant Z.

1) Démontrer que $\mathbb{E}(Y|Z) = mZ$ (indication : on pourra vérifier la formule proposée en utilisant la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle et le fait que la tribu engendrée par Z est engendrée par les événements $[Z = n]$, $n \in \mathbb{N}$).

2) Démontrer que $\mathbb{E}(Y^2|Z) = m^2 Z^2 + \sigma^2 Z$.

Partie B) Soit $(X_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, à valeurs entières et de même loi ayant un moment d'ordre deux. On note $m = \mathbb{E}(X_{ij})$ et $\sigma^2 = Var(X_{ij})$ et on suppose $m > 0$.
On considère la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires définies par $Z_0 = 1$ et

$$Z_{n+1} = \mathbf{1}_{[Z_n>0]} \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n+1}$$

et on note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle de la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par les variables $(Z_k)_{0\leq k\leq n}$).

1) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{Z_n}{m^n}\right)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

2) a) Montrer que si $m > 1$ la martingale précédente est bornée dans L^2.
b) Expliquer comment on peut alors en déduire le comportement presque-sûr de la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ quand $n \to +\infty$.

III

Les quatre questions de l'exercice sont indépendantes.

Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ représentant les arrivées de clients dans un système (on suppose $N_0 = 0$). Pour $t > 0$, on note $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $(N_s)_{s\leq t}$.

1) Rappeler quel est le nombre moyen de clients qui arrivent entre les instants $t = a$ et $t = b$ ($a < b$). Quelle est la variance de ce nombre de clients ?

2) a) Démontrer que pour tout $t > 0$ et tout $h > 0$, $\mathbb{E}(N_{t+h}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(N_{t+h}|N_t)$.
b) On pose $X_t = N_t - \lambda t$, en déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall h > 0,\ \mathbb{E}(X_{t+h}|\mathcal{F}_t) = X_t\ (p.s.)$$

(on dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale à temps continu, en particulier si on ne regarde le processus qu'aux instants n entiers, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale).

c) La martingale $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente dans L^2 ?

3) a) Trouver la limite au sens presque-sûr de la suite $(\frac{N_n}{n})_{n\geq 0}$ quand $n \to +\infty$ (on pourra utiliser la loi forte des grands nombres).
b) En déduire que $N_t \to +\infty$ p.s. quand $t \to +\infty$.

4) Soit T_n l'instant de l'arrivée du n-ième client. On rappelle (cours) que pour tout entier $n \geq 1$, les variables aléatoires $\tau_1 := T_1$, $\tau_2 = T_2 - T_1$,..., $\tau_n := T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. Par récurrence sur l'entier n, déterminer la loi de T_n ; précisément, démontrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(T_n > t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$