Université de Tours

UFR Sciences et Techniques **Année 2008-2009**

Master 1 de Mathématiques **Lundi 4 mai 2009**

Épreuve de Probabilités 2 (Durée : 3 heures)

Le seul document autorisé est le formulaire joint au sujet.
Tout matériel électronique est interdit.

Les trois parties sont indépendantes

Partie I

La question 1) est indépendante des questions 2) et 3)

1) (question de cours) : Démontrer que si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet (fini) d'événements, alors pour toute variable aléatoire X ayant un moment d'ordre 1, on

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X|A_k)\mathbb{P}(A_k).$$

2) Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $U = \dfrac{X+YZ}{\sqrt{1+Z^2}}$.

a) Calculer la fonction caractéristique φ_U de U en utilisant la loi du vecteur (X,Y,Z) et en déduire que U suit une loi bien connue qu'on identifiera (indication : pour calculer l'intégrale triple exprimant φ_U, on utilisera le théorème de Fubini).

b) Montrer que le vecteur aléatoire (U,Z) est gaussien dont on précisera les paramètres et en déduire que les variables aléatoires U et Z sont indépendantes (indication : calculer la fonction caractéristique de (U,Z) en calculant une intégrale triple comme dans la question a).

Partie II

La question 1) est indépendante des questions 2) et 3).

1) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} Z_n$ converge presque sûrement et que sa somme Z est une variable aléatoire de L^1.

a) Justifier que pour tout $n\geq 0$, $\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z_n)$ est bien définie.

b) Démontrer que

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}^{\mathcal{B}}(Z_n).$$

2) Démontrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes ayant un moment d'ordre 1 et si pour $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, borélienne, la variable aléatoire $Z=f(X,Y)$ est aussi dans L^1, alors $\mathbb{E}(Z|X)=\phi(X)$, où ϕ est la fonction définie par $\phi(x)=\mathbb{E}(f(x,Y))$ $(x\in\mathbb{R})$. (indication : on utilisera la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle et le fait

que tout événement de la tribu $\mathcal{B}(X)$ engendrée par X est de la forme $[X \in C]$ où C est un borélien de $\mathbb{R}$).

3) Soient X et Y deux variables aléatoires positives indépendantes. On suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que la variable aléatoire X est bornée par une constante $\alpha < \lambda$.

a) Démontrer que la variable aléatoire $Z = \exp(XY)$ est dans L^1.

b) Démontrer que $\mathbb{E}(Z|X) = \left(1 - \frac{X}{\lambda}\right)^{-1}$ (indication : on rappelle que la densité de Y est la fonction $y \mapsto \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$).

Partie III

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = 2^{-k} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

On définit par récurrence pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires Z_n par la formule

$$Z_n = \frac{3Z_{n-1}}{2^{X_n}}.$$

1) Démontrer que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 1}$ où $\mathcal{B}_n$ est la tribu engendrée par les variables $X_1, \ldots, X_n$.

2) La suite (Z_n) converge-t-elle dans L^2 ?

3) Calculer $\frac{1}{n} \ln(Z_n)$ et sa limite presque sûre en utilisant la loi des grands nombres. En déduire une explication du résultat de la question 2).